الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالإجابات

2021

التفاضل و التكامل

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

3 ثانوى

تنويه

نحيط علم سيادتكم اننا
ننشر هذا الكتاب فقط من اجل
الطلبة الغير قادرين وان كل ذخرنا
من اجلهم

وايضا لمحبي الكتب الالكترونية
وليس لناعلاقة بالاستخدام السيء
دمتم موفقين طالبين لكم
النجاح

يسرنا تواجدكم معنا في جروب

تالتة ثانوي تفوق وليس النجاح

انضم الينا من خلال

اجابات تمارين 1

١

① $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^2\ 5\text{س} \times 5 = -5\ \text{قتا}^2\ 5\text{س}$

② $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 2\text{س} \times 2$

$= -2\ \text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 2\text{س}$

③ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\ 7\text{س}\ \text{ظا}\ 7\text{س} \times 7$

$= 7\ \text{قا}\ 7\text{س}\ \text{ظا}\ 7\text{س}$

④ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\ \frac{\text{س}}{2}\ \text{ظتا}\ \frac{\text{س}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{قتا}\ \frac{\text{س}}{2}\ \text{ظتا}\ \frac{\text{س}}{2}$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\ \frac{3}{4}\text{س}\ \text{ظا}\ \frac{3}{4}\text{س} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{3}{4}\ \text{قا}\ \frac{3}{4}\text{س}\ \text{ظا}\ \frac{3}{4}\text{س}$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}(5\text{س}+2)\ \text{ظا}(5\text{س}+2) \times 5$

$= 5\ \text{قا}(5\text{س}+2)\ \text{ظا}(5\text{س}+2)$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}(\pi - 2\text{س})\ \text{ظتا}(\pi - 2\text{س}) \times -2$

$= 2\ \text{قتا}(\pi - 2\text{س})\ \text{ظتا}(\pi - 2\text{س})$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^2(\text{س}^2+3) \times 2\text{س}$

$= -2\text{س}\ \text{قتا}^2(\text{س}^2+3)$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = 1 + (-\text{قتا}^2\ 2\text{س}) \times 2$

$= 1 - 2\ \text{قتا}^2\ 2\text{س}$

⑩ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2}\text{س}^{\frac{-2}{3}} + \text{قا}\ 5\text{س}\ \text{ظا}\ 5\text{س} \times 5$

$= \frac{1}{3\sqrt{\text{س}^2}} + 5\ \text{قا}\ 5\text{س}\ \text{ظا}\ 5\text{س}$

⑪ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^2(\frac{1}{2}\text{س}^4) \times 2\text{س}^3$

$= -2\text{س}^3\ \text{قتا}^2(\frac{1}{2}\text{س}^4)$

⑫ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظتا}\sqrt{\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

$= \frac{-1}{2\sqrt{\text{س}}}\ \text{قتا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظتا}\sqrt{\text{س}}$

⑬ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}(3\text{س}^4 + 2\text{س}^2 - 1)$

$\text{ظا}(3\text{س}^4 + 2\text{س}^2 - 1)$

$\times (12\text{س}^3 + 4\text{س})$

$= 4\text{س}(3\text{س}^2+1)\ \text{قا}(3\text{س}^4 + 2\text{س}^2 - 1)$

$\text{ظا}(3\text{س}^4 + 2\text{س}^2 - 1)$

⑭ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}^2(\pi - \frac{1}{\text{س}}) \times \frac{1}{\text{س}^2}$

$= \frac{-1}{\text{س}^2}\ \text{قتا}^2(\pi - \frac{1}{\text{س}})$

⑮ $\frac{ءص}{ءس} = 15\text{س}^4 + 4(-\text{قتا}^2\text{س})$

$= 15\text{س}^4 - 4\ \text{قتا}^2\text{س}$

⑯ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{جا}\ 2\text{س} \times 2 - 5(-\text{قتا}^2(3\text{س}) \times 3)$

$= -2\ \text{جا}\ 2\text{س} + 15\ \text{قتا}^2\ 3\text{س}$

⑰ $\frac{ءص}{ءس} = 3\ \text{قا}\ 2\text{س}\ \text{ظا}\ 2\text{س} \times 2$

$+ 2(-\text{قتا}\ 3\text{س} \times \text{ظتا}\ 3\text{س}) \times 3$

$= 6\ \text{قا}\ 2\text{س}\ \text{ظا}\ 2\text{س} - 6\ \text{قتا}\ 3\text{س}\ \text{ظتا}\ 3\text{س}$

⑱ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{جاس} + 4\ \text{قاس}\ \text{ظاس}$

⑲ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\ \frac{\text{س}}{4}\ \text{ظا}\ \frac{\text{س}}{4} \times \frac{1}{4} +$ صفر

$= \frac{1}{4}\ \text{قا}\ \frac{\text{س}}{4}\ \text{ظا}\ \frac{\text{س}}{4}$

⑳ $\frac{ءص}{ءس} = 3(-\text{قتا}\sqrt{1+\text{س}^2}\ \text{ظتا}\sqrt{1+\text{س}^2})$

$\times \frac{2\text{س}}{2\sqrt{1+\text{س}^2}}$

$= \frac{-3\text{س}}{\sqrt{1+\text{س}^2}}\ \text{قتا}\sqrt{1+\text{س}^2}\ \text{ظتا}\sqrt{1+\text{س}^2}$

٢

① $\frac{ءص}{ءس} = \text{قا}\ 3\text{س} + \text{س}\ \text{قا}\ 3\text{س}\ \text{ظا}\ 3\text{س} \times 3$

$= \text{قا}\ 3\text{س} + 3\text{س}\ \text{قا}\ 3\text{س}\ \text{ظا}\ 3\text{س}$

② $\frac{ءص}{ءس} = 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 3\text{س} + \text{س}^2(-\text{قتا}^2\ 3\text{س}) \times 3$

$= 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 3\text{س} - 3\text{س}^2\ \text{قتا}^2\ 3\text{س}$

③ $\frac{ءص}{ءس} = 3\text{س}^2\ \text{قتاس} + \text{س}^3(-\text{قتاس}\ \text{ظتاس})$

$= 3\text{س}^2\ \text{قتاس} - \text{س}^3\ \text{قتاس}\ \text{ظتاس}$

④ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قاس}\ \text{ظاس}\ \text{ظا}\ 2\text{س}$

$+ \text{قاس}\ \text{قا}^2\ 2\text{س} \times 2$

$= \text{قاس}\ \text{ظاس}\ \text{ظا}\ 2\text{س} + 2\ \text{قاس}\ \text{قا}^2\ 2\text{س}$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتاس}\ \text{ظتاس}\ \text{ظتاس} + \text{قتاس}(-\text{قتا}^2\text{س})$

$= -\text{قتاس}\ \text{ظتا}^2\text{س} - \text{قتا}^3\text{س}$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = -\text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 2\text{س} \times 2 \times \text{قا}\ 3\text{س}$

$+ \text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{قا}\ 3\text{س}\ \text{ظا}\ 3\text{س} \times 3$

$= -2\ \text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 2\text{س}\ \text{قا}\ 3\text{س}$

$+ 3\ \text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{قا}\ 3\text{س}\ \text{ظا}\ 3\text{س}$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = (2\text{س}+5)\ \text{قاس}$

$+ (\text{س}^2 + 5\text{س} + 6)\ \text{قاس}\ \text{ظاس}$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = \text{قاس}^2\ \text{ظاس}^2 \times (2\text{س})\ \text{ظاس}^2$

$+ \text{قاس}^2\ \text{قا}^2\text{س}^2 \times 2\text{س}$

$= 2\text{س}\ \text{قاس}^2\ \text{ظا}^2\text{س}^2 + 2\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}^2$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = 2\text{س}\ \text{قا}\frac{1}{\text{س}} + \text{س}^2\ \text{قا}\frac{1}{\text{س}}\ \text{ظا}\frac{1}{\text{س}} \times \frac{-1}{\text{س}^2}$

$= 2\text{س}\ \text{قا}\frac{1}{\text{س}} - \text{قا}\frac{1}{\text{س}}\ \text{ظا}\frac{1}{\text{س}}$

⑩ $\frac{ءص}{ءس} = 3(5\text{س} + \text{قتاس})$

$+ (3\text{س}+4)(5 - \text{قتاس}\ \text{ظتاس})$

⑪ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\ \text{قا}\sqrt{\text{س}}$

$+ \sqrt{\text{س}}\ \text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

$= \frac{\text{قا}\sqrt{\text{س}}}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{2}\ \text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}}$

⑫ $\frac{ءص}{ءس} = 2\text{س}\ \text{جتاس}\ \text{ظتاس}$

$+ \text{س}^2(-\text{جاس})\ \text{ظتاس}$

$+ \text{س}^2\ \text{جتاس}(-\text{قتا}^2\text{س})$

$= 2\text{س}\ \text{جتاس}\ \text{ظتاس}$

$- \text{س}^2\ \text{جاس}\ \text{ظتاس} - \text{س}^2\ \text{جتاس}\ \text{قتا}^2\text{س}$

٣

① $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{س}(-\text{قتا}^2\text{س}) - \text{ظتاس} \times 1}{\text{س}^2}$

$= \frac{-\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س} - \text{ظتاس}}{\text{س}^2}$

② $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-\text{س}\ \text{قتاس}\ \text{ظتاس} - \text{قتاس}}{\text{س}^2}$

③ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{قاس}(-1) - (6 - \text{س})\ \text{قاس}\ \text{ظاس}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \frac{-\text{قاس} - 6\ \text{قاس}\ \text{ظاس} + \text{س}\ \text{قاس}\ \text{ظاس}}{\text{قا}^2\text{س}}$

④ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(2\text{س}+3)(-\text{قتا}^2\ 3\text{س}) \times 3 - \text{ظتا}\ 3\text{س} \times 2}{(2\text{س}+3)^2}$

$= \frac{-6\text{س}\ \text{قتا}^2\ 3\text{س} - 9\ \text{قتا}^2\ 3\text{س} - 2\ \text{ظتا}\ 3\text{س}}{(2\text{س}+3)^2}$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{س}^2(-\text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 2\text{س}) \times 2 - \text{قتا}\ 2\text{س} \times 2\text{س}}{\text{س}^4}$

$= \frac{-2\text{س}^2\ \text{قتا}\ 2\text{س}\ \text{ظتا}\ 2\text{س} - 2\text{س}\ \text{قتا}\ 2\text{س}}{\text{س}^4}$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(1+\text{قاس})(-\text{قاس}\ \text{ظاس}) - (1-\text{قاس})(\text{قاس}\ \text{ظاس})}{(1+\text{قاس})^2}$

$= \frac{-\text{قاس}\ \text{ظاس} - \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظاس} - \text{قاس}\ \text{ظاس} + \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظاس}}{(1+\text{قاس})^2}$

$= \frac{-2\ \text{قاس}\ \text{ظاس}}{(1+\text{قاس})^2}$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(1+\text{قاس})\ \text{قاس}\ \text{ظاس} - \text{قاس}(0 + \text{قاس}\ \text{ظاس})}{(1+\text{قاس})^2}$

$= \frac{\text{قاس}\ \text{ظاس} + \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظاس} - \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظاس}}{(1+\text{قاس})^2}$

$= \frac{\text{قاس}\ \text{ظاس}}{(1+\text{قاس})^2}$

⑧ $\frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{\text{ظا}(4\text{س}-1)(-\text{قتا}(2\text{س}+1)\ \text{ظتا}(2\text{س}+1) \times 2) - \text{قتا}(2\text{س}+1)\ \text{قا}^2(4\text{س}-1) \times 4}{\text{ظا}^2(4\text{س}-1)}$

$= \frac{-2\ \text{ظا}(4\text{س}-1)\ \text{قتا}(2\text{س}+1)\ \text{ظتا}(2\text{س}+1) - 4\ \text{قتا}(2\text{س}+1)\ \text{قا}^2(4\text{س}-1)}{\text{ظا}^2(4\text{س}-1)}$

٤

① $\frac{ءص}{ءس} = ٤\ قا^{٣}\ س \times (-\ قا\ س\ ظا\ س)$

$= -٤\ قا^{٤}\ س\ ظا\ س$

② $\frac{ءص}{ءس} = ٧\ ظا^{٦}\ س \times (-\ قا^{٢}\ س)$

$= -٧\ قا^{٢}\ س\ ظا^{٦}\ س$

③ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ \times ٢\ قا\ (٢\ س + \pi)\ قا\ (٢\ س + \pi)$

$ظا\ (٢\ س + \pi) \times ٢$

$= ١٢\ قا^{٢}\ (٢\ س + \pi)\ ظا\ (٢\ س + \pi)$

④ $\frac{ءص}{ءس} = ٢\ قا\ (١ + ٣\ س^{٢}) \times (-\ قا\ (١ + ٣\ س^{٢}))$

$ظا\ (١ + ٣\ س^{٢}) \times ٦\ س$

$= -١٢\ س\ قا^{٢}\ (١ + ٣\ س^{٢})\ ظا\ (١ + ٣\ س^{٢})$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = ٣\ ظا^{٢}\ \sqrt{س}\ (-\ قا^{٢}\ \sqrt{س}) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$= \frac{-٣}{٢\sqrt{س}}\ ظا^{٢}\ \sqrt{س}\ قا^{٢}\ \sqrt{س}$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = ٢\ جا\ ٣\ س \times جتا\ ٣\ س \times ٣$

$+ ٢\ قا\ س\ قا\ س\ ظا\ س$

$= ٦\ جا\ ٣\ س\ جتا\ ٣\ س + ٢\ قا^{٢}\ س\ ظا\ س$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = ظا^{٢}\ س + س \times ٢\ ظا\ س\ (-\ قا^{٢}\ س)$

$= ظا^{٢}\ س - ٢\ س\ ظا\ س\ قا^{٢}\ س$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = ٣\ س^{٢}\ قا^{٢}\ ٣\ س + س^{٢} \times ٢\ قا\ ٣\ س$

$\times قا\ ٣\ س\ ظا\ ٣\ س \times ٣$

$= ٣\ س^{٢}\ قا^{٢}\ ٣\ س + ٦\ س^{٢}\ قا^{٢}\ ٣\ س\ ظا\ ٣\ س$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س\ (٢\ قا\ س\ قا\ س\ ظا\ س) - قا^{٢}\ س}{س^{٢}}$

$= \frac{٢\ س\ قا^{٢}\ س\ ظا\ س - قا^{٢}\ س}{س^{٢}}$

⑩ $\frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{قا^{٢}\ ٢\ س \times ١ - س\ (٢\ قا\ ٢\ س) \times (-\ قا\ ٢\ س\ ظا\ ٢\ س) \times ٢}{قا^{٤}\ ٢\ س}$

$= \frac{قا^{٢}\ ٢\ س + ٤\ س\ قا^{٢}\ ٢\ س\ ظا\ ٢\ س}{قا^{٤}\ ٢\ س}$

$= \frac{١ + ٤\ س\ ظا\ ٢\ س}{قا^{٢}\ ٢\ س}$

⑪ $\frac{ءص}{ءس} = -\ قا^{٢}\ ٧\ س^{٢} \times ١٤\ س$

$+ ٢\ ظا\ ٧\ س \times (-\ قا^{٢}\ ٧\ س) \times ٧$

$= -١٤\ س\ قا^{٢}\ ٧\ س^{٢}$

$- ١٤\ ظا\ ٧\ س\ قا^{٢}\ ٧\ س$

⑫ $\frac{ءص}{ءس} = ٣\ قا^{٢}\ ٢\ س \times قا\ ٢\ س\ ظا\ ٢\ س$

$\times ٢ \times ظا^{٢}\ ٢\ س + قا^{٣}\ ٢\ س$

$\times ٣\ ظا^{٢}\ ٢\ س \times قا^{٢}\ ٢\ س \times ٢$

$= ٦\ قا^{٣}\ ٢\ س\ ظا^{٤}\ ٢\ س$

$+ ٦\ قا^{٥}\ ٢\ س\ ظا^{٢}\ ٢\ س$

⑬ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-\ قا^{٢}\ س}{٢\sqrt{١ + ظا\ س}}$

⑭ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-\ قا\ س\ ظا\ س}{٢\sqrt{١ + قا\ س}}$

⑮ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}\ (س + ظا\ س)^{\frac{-٢}{٣}}\ (١ - قا^{٢}\ س)$

$= \frac{١ - قا^{٢}\ س}{٣\sqrt[٣]{(س + ظا\ س)^{٢}}}$

⑯ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣\ س^{٢} + ٢\ ظا\ ٤\ س \times (-\ قا^{٢}\ ٤\ س) \times ٤}{٢\sqrt{س^{٣} + ظا^{٢}\ ٤\ س}}$

$= \frac{٣\ س^{٢} - ٨\ ظا\ ٤\ س\ قا^{٢}\ ٤\ س}{٢\sqrt{س^{٣} + ظا^{٢}\ ٤\ س}}$

٥

① $\frac{ءص}{ءس} = ٢\ (١ + ظا\ س)\ (-\ قا^{٢}\ س)$

$= -٢\ قا^{٢}\ س\ (١ + ظا\ س)$

② $\frac{ءص}{ءس} = ٢\ (٣ - ٢\ ظا\ س)\ (-٢\ (-\ قا^{٢}\ س))$

$= ٤\ قا^{٢}\ س\ (٣ - ٢\ ظا\ س)$

③ $\frac{ءص}{ءس} = -\ (قا\ س + ظا\ س)^{-٢}$

$(-\ قا\ س\ ظا\ س + (-\ قا^{٢}\ س))$

$= \frac{قا\ س\ ظا\ س + قا^{٢}\ س}{(قا\ س + ظا\ س)^{٢}}$

$= \frac{قا\ س\ (ظا\ س + قا\ س)}{(قا\ س + ظا\ س)^{٢}}$

$= \frac{قا\ س}{قا\ س + ظا\ س}$

④ $\frac{ءص}{ءس} = -٢\ (س + قا\ س)^{-٢}\ (١ - قا\ س\ ظا\ س)$

$= \frac{-٢\ (١ - قا\ س\ ظا\ س)}{(س + قا\ س)^{٢}}$

⑤ $\frac{ءص}{ءس} = قا^{٢}\ (ظا\ س) \times (-\ قا^{٢}\ س)$

$= -\ قا^{٢}\ س\ قا^{٢}\ (ظا\ س)$

⑥ $\frac{ءص}{ءس} = -\ قا^{٢}\ (جا\ ٣\ س) \times (-\ جا\ ٣\ س \times ٣)$

$= ٣\ جا\ ٣\ س\ قا^{٢}\ (جتا\ ٣\ س)$

⑦ $\frac{ءص}{ءس} = قا\ (ظا^{٢}\ س) \times ظا\ (ظا^{٢}\ س) \times ٢\ ظا\ س \times قا^{٢}\ س$

$= ٢\ ظا\ س\ قا^{٢}\ س\ قا\ (ظا^{٢}\ س)\ ظا\ (ظا^{٢}\ س)$

⑧ $\frac{ءص}{ءس} = ٢\ قا\ (ظا\ س)\ قا\ (ظا\ س)\ ظا\ (ظا\ س) \times قا^{٢}\ س$

$= ٢\ قا^{٢}\ س\ قا^{٢}\ (ظا\ س)\ ظا\ (ظا\ س)$

⑨ $\frac{ءص}{ءس} = جتا\ (قا\ ٣\ س^{٢}) \times (-\ قا\ ٣\ س^{٢}\ ظا\ ٣\ س^{٢} \times ٦\ س)$

$= -٦\ س\ جتا\ (قا\ ٣\ س^{٢}) \times قا\ ٣\ س^{٢}\ ظا\ ٣\ س^{٢}$

⑩ $\frac{ءص}{ءس} = قا^{٢}\ (قا\ س^{٢}) \times قا\ س^{٢}\ ظا\ س^{٢} \times ٢\ س$

$= ٢\ س\ قا\ س^{٢}\ ظا\ س^{٢}\ قا^{٢}\ (قا\ س^{٢})$

٦

① $\frac{ءص}{ءس} = -\ قا\ \frac{س}{٢}\ ظا\ \frac{س}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= -\frac{١}{٢}\ قا\ \frac{س}{٢}\ ظا\ \frac{س}{٢}$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{\pi}{٢}} = \frac{-١}{٢\sqrt{٢}}$

② $\frac{ءص}{ءس} = -٢\ قا^{٢}\ س + \sqrt{٢}\ قا\ س\ ظا\ س$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{\pi}{٤}} = -٢$

③ $\frac{ءص}{ءس} = ٢\ قا^{٢}\ س - ٢\ قا\ س\ (-\ قا\ س\ ظا\ س)$

$= ٢\ قا^{٢}\ س + ٢\ قا^{٢}\ س\ ظا\ س$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{\pi}{٤}} = ٢$

④ $\frac{ءص}{ءس} = ١٥\ ظا^{٤}\ س \times (-\ قا^{٢}\ س)$

$= -١٥\ ظا^{٤}\ س\ قا^{٢}\ س$

الميل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{\pi}{٤}} = -٣٠$

٧

① (د)	② (ب)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (د)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (ب)
⑰ (أ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)		

٨

$\frac{ءص}{ءع} = -\ قا^{٢}\ (\frac{\pi}{٦}\ ع) \times \frac{\pi}{٦} = -\frac{\pi}{٦}\ قا^{٢}\ \frac{\pi}{٦}\ ع$

$\frac{ءع}{ءس} = ٣ \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{٣}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = -\frac{\pi}{٦}\ قا^{٢}\ \frac{\pi}{٦}\ ع \times \frac{٣}{٢\sqrt{س}}$

عند س = ١ فإن : ع = ٣

فإن $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{\substack{س = ١ \\ ع = ٣}} = -\frac{\pi}{٦}\ قا^{٢}\ (\frac{\pi}{٦} \times ٣) \times \frac{٣}{٢\sqrt{١}}$

$= -\frac{\pi}{٦} \times ١ \times \frac{٣}{٢} = -\frac{\pi}{٤}$

٩

$\frac{ءص}{ءس} = جتاس + قاس ظاس$ ، $\frac{ءس}{ءع} = ٣\pi$

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءع} = ٣\pi\,(جتاس + قاس ظاس)$

عند ع = ١ فإن : س = ٣π

$\left[\frac{ءص}{ءع}\right]_{س = ٣\pi} = ٣\pi\,(جتا ٣\pi + قا ٣\pi\, ظا ٣\pi)$

$= ٣\pi\,(-١ + -١ \times ٠) = -٣\pi$

١٠

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{-٢}{٢\sqrt{٥ - ٢ع}} = \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢ع}}$

$\frac{ءع}{ءس} = ٢\,قا ٢س\, ظا ٢س$

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ ، ع = ٢

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢ع}} \times ٢\,قا ٢س\, ظا ٢س$

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{\substack{س = \frac{\pi}{٦} \\ ع = ٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢ \times ٢}} \times ٢ \times قا\frac{\pi}{٣} \times ظا\frac{\pi}{٣}$

$= -١ \times ٢ \times ٢ \times \sqrt{٣} = -٤\sqrt{٣}$

الطرف الأيمن = $\sqrt{٣} \times -٤\sqrt{٣} + ١٢$ = صفر = الأيسر

١١

$\frac{ءص}{ءع} = ٥\,(٥ع + ١)^٤ \times ٥ = ٢٥\,(٥ع + ١)^٤$

$\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٥}\,(-قا^٢ ٢س) \times ٢ = \frac{-٢}{٥}\,قا^٢ ٢س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢٥\,(٥ع + ١)^٤ \times \frac{-٢}{٥}\,قا^٢ ٢س$

$= -١٠\,قا^٢ ٢س\,(٥ع + ١)^٤$

عند س = $\frac{\pi}{٨}$ فإن : ع = $\frac{١}{٥}$

$\therefore \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{\substack{س = \frac{\pi}{٨} \\ ع = \frac{١}{٥}}} = -١٠ \times ٢ \times (٢)^٤ = -٣٢٠$

١٢

$\frac{ءص}{ءس} = -قاس\, ظاس - قا^٢ س$

$= -قاس\,(ظاس + قاس) = -قاس \times ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} + ص\, قاس = ٠$

١٣

$\because ص = \frac{١}{٤}\,قا^٤ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٤} \times ٤\,قا^٣ س\, قاس\, ظاس$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = قا^٤ س\, ظاس$ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٤ص\, ظاس$

١٤

$\frac{ءص}{ءس} = لـ(قاس + ظاس)^{لـ - ١}\,(قاس\, ظاس + قا^٢ س)$

$= لـ(قاس + ظاس)^{لـ - ١} \times قاس\,(ظاس + قاس)$

$= لـ\, قاس\,(قاس + ظاس)^{لـ} = لـ ص\, قاس$

١٥

$\frac{ءص}{ءس} = لـ(قاس)^{لـ - ١} \cdot قاس\, ظاس$

$= لـ(قاس)^{لـ} \cdot ظاس = لـ ص\, ظاس$

١٦

$\frac{ءص}{ءس} = قاس\,(جتاس - جاس)$

$+ (جاس + جتاس)\, قاس\, ظاس$

$= ١ - ظاس + ظا^٢ س + ظاس = ١ + ظا^٢ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - ظا^٢ س = ١$

١٧

$ص = (ع^٢ - ١)^٢ = (قا^٢ ٤س - ١)^٢ = (ظا^٢ ٤س)^٢$

$ص = ظا^٤ ٤س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٤\,ظا^٣ ٤س\,(-قا^٢ ٤س) \times ٤$

$= -١٦\,ظا^٣ ٤س\, قا^٢ ٤س$

$= \frac{-١٦\,ص\, قا^٢ ٤س}{ظا ٤س}$

$= -١٦\,ص\, قا ٤س\, قا ٤س$

$= \frac{-١٦\,ص}{جتا ٤س\, جا ٤س} = \frac{-١٦\,ص}{\frac{١}{٢}\,جا ٨س}$

$= -٣٢\,ص\, قا ٨س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} + ٣٢\,ص\, قا ٨س = ٠$

١٨

① $\overline{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف قطر

$\therefore \overline{أب} \perp \overline{مب}$ $\therefore قا\theta = \frac{نق + س}{نق}$

$\therefore قا\theta = ١ + \frac{س}{نق}$

$\therefore س = نق\,(قا\theta - ١)$ (١)

② بالاشتقاق بالنسبة إلى θ

$\frac{ءس}{ءθ} = نق\,(-قا\theta\, ظا\theta)$

عند θ = $\frac{\pi}{٦}$ $\therefore \frac{ءس}{ءθ} = -٢\sqrt{٣}\,نق$

١٩

① (جـ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٩

① $\because ص = ظاس$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -قا^٢ س$ معرفة لجميع قيم

$س \in ح - \{لـ\pi$ حيث $لـ \in ص\}$

② $\because د(ظاس) = جاس$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore د'(ظاس) \times قا^٢ س = جتاس$

$\therefore د'(ظاس) = \frac{جتاس}{قا^٢ س} = جتا^٢ س$

وبوضع س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : ظاس = ١

$\therefore د'(١) = جتا^٢ \frac{\pi}{٤} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$

③ $\because ق(س) = (د \circ ر)(س)$

$= د(ر(س)) = د(ظاس)$

$= ظا^٢ س$

$\therefore ق'(س) = ٢\,ظاس \times -قا^٢ س$

$= -٢\,ظاس\, قا^٢ س$

$\therefore ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -٢\,ظا\frac{\pi}{٤}\,قا^٢ \frac{\pi}{٤} = -٤$

④ $\because \lim_{س \to ٠} \frac{د(س) - د(٠)}{س - ٠} = د'(٠)$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س} = د'(٠) = جتا^٢(٠) = ١$

⑤ بوضع ع = |س| $\therefore ع^٢ = س^٢$

$\therefore ٢ع\frac{ءع}{ءس} = ٢س$

$\frac{ءع}{ءس} = \frac{س}{ع} = \frac{س}{|س|}$

، $\because ص = قاع$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = قاع\, ظاع \times \frac{ءع}{ءس}$

$= قا|س|\, ظا|س| \times \frac{س}{|س|}$

$= \frac{س}{|س|}\,قا|س|\, ظا|س|$

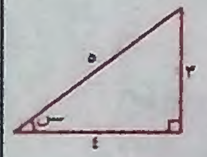
⑥ $\because د(جاس) = أ\, جتاس$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore د'(جاس) \times جتاس = أ \times -جاس$

$\therefore د'(جاس) = \frac{-أ\, جاس}{جتاس} = -أ\, ظاس$

وبوضع جاس = $\frac{٣}{٥}$



$\therefore د'\left(\frac{٣}{٥}\right) = -أ \times \frac{٣}{٤}$

$\therefore -\frac{٣}{٤}\,أ = -٦$

$\therefore أ = ٨$

⑦ نفرض أن (س) هو قياس الزاوية بالتقدير الستينى ،

(هـ) هو قياس نفس الزاوية بالتقدير الدائرى

، $\because ص = ظاس$

$\therefore ص = ظاهـ$ ، $هـ = س \times \frac{\pi}{١٨٠}$

$\therefore \frac{ءهـ}{ءس} = \frac{\pi}{١٨٠}$

، $\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءهـ} \times \frac{ءهـ}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -قا^٢ هـ \times \frac{\pi}{١٨٠} = -قا^٢ س \times \frac{\pi}{١٨٠}$

$= -\frac{\pi}{١٨٠}\,قا^٢ س$

إجابات تمارين 2

أولاً مسائل على الاشتقاق الضمنى

١

① $س^{٢} - ٤ ص^{٢} + ٧ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س - ٨ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{٤ ص}$

② $س^{٤} + ٣ ص^{٤} - ٢ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٤ س^{٣} + ١٢ ص^{٣} \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س^{٣}}{٣ ص^{٣}}$

③ $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢ (س - ٣) + ٢ (ص + ٢) \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-(س - ٣)}{(ص + ٢)} = \frac{٣ - س}{ص + ٢}$

④ $س^{٣} + ص^{٢} - ٧ س + ٥ ص = ٨$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٣ س^{٢} + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} - ٧ + ٥ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$(٢ ص + ٥) \frac{ءص}{ءس} + (٣ س^{٢} - ٧) = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٧ - ٣ س^{٢}}{٢ ص + ٥}$

⑤ $س^{٣} + ص^{٣} - ٢ س + ٣ ص^{٢} = ٨$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} - ٢ + ٦ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (٣ ص^{٢} + ٦ ص) = ٢ - ٣ س^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ - ٣ س^{٢}}{٣ ص^{٢} + ٦ ص}$

⑥ $س^{٢} + ٩ ص^{٢} - ٦ س ص = ٤$

$\therefore (س - ٣ ص)^{٢} = ٤$

$\therefore س - ٣ ص = \pm ٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ١ - ٣ \frac{ءص}{ءس} = ٠ \quad \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}$

⑦ $س^{٣} - ٥ س ص + ص^{٣} = ٤ س$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ س^{٢} - ٥ ص - ٥ س \frac{ءص}{ءس}$

$+ ٣ ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} = ٤$

$\therefore (٣ ص^{٢} - ٥ س) \frac{ءص}{ءس} = ٤ - ٣ س^{٢} + ٥ ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤ - ٣ س^{٢} + ٥ ص}{٣ ص^{٢} - ٥ س}$

⑧ $س ص = ١٠٠ (س + ص)$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ص + س \frac{ءص}{ءس} = ١٠٠ + ١٠٠ \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore (س - ١٠٠) \frac{ءص}{ءس} = ١٠٠ - ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١٠٠ - ص}{س - ١٠٠}$

⑨ $س^{٢} ص^{٢} = ١٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س^{٢} \times ٢ ص \frac{ءص}{ءس} + ص^{٢} \times ٢ س = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ ص^{٢} س}{٢ س^{٢} ص} = \frac{-ص}{س}$

⑩ $س^{٢} ص + ص^{٢} س = ٢٥$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س ص + س^{٢} \frac{ءص}{ءس} + ص^{٢}$

$+ ٢ س ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore (س^{٢} + ٢ س ص) \frac{ءص}{ءس} = -٢ س ص - ص^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص (٢ س + ص)}{س (س + ٢ ص)}$

⑪ $س^{ن} ص^{ن} = أ^{ن}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س^{ن} \times ن ص^{ن-١} \frac{ءص}{ءس} + ص^{ن}$

$\times ن س^{ن-١} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص^{ن} \times ن س^{ن-١}}{س^{ن} \times ن ص^{ن-١}}$

$= -\left(\frac{ص}{س}\right)^{ن} \times \left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١} = \frac{-ص}{س}$

⑫ $س^{ن} + ص^{ن} = أ^{ن}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ن س^{ن-١} + ن ص^{ن-١} \frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ن س^{ن-١}}{ن ص^{ن-١}} = -\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١}$

٢

① $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥$

$\therefore ٢ س^{-١} + ٣ ص^{-١} = ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore -٢ س^{-٢} - ٣ ص^{-٢} \frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ س^{-٢}}{٣ ص^{-٢}} = \frac{-٢ ص^{٢}}{٣ س^{٢}} = \frac{-٢}{٣} \left(\frac{ص}{س}\right)^{٢}$

② $س^{٣} + ص^{٣} = ٧ س^{٢} - ٧ ص^{٢}$

$\therefore ٦ س^{٢} - ٨ ص^{٢} = صفر$

$\therefore ٣ س^{٢} - ٤ ص^{٢} = صفر$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٩ س^{٢} - ١٢ ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٩ س^{٢}}{١٢ ص^{٢}} = \frac{٣}{٤} \left(\frac{س}{ص}\right)^{٢}$

③ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٤$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س^{-\frac{١}{٢}}}{ص^{-\frac{١}{٢}}} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

④ $ص + \sqrt{س ص} = ٢ س^{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{ءص}{ءس} + \frac{١}{٢\sqrt{س ص}} \times \left[س \frac{ءص}{ءس} + ص\right] = ٤ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} + \frac{س}{٢\sqrt{س ص}} \frac{ءص}{ءس} + \frac{ص}{٢\sqrt{س ص}} = ٤ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤ س - \frac{ص}{٢\sqrt{س ص}}}{١ + \frac{س}{٢\sqrt{س ص}}}$

$= \frac{٨ س \sqrt{س ص} - ص}{٢\sqrt{س ص} + س}$

⑤ $جا ٣ س = طا ٢ ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ جتا ٣ س = ٢ قا^{٢} ٢ ص \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ جتا ٣ س}{٢ قا^{٢} ٢ ص}$

⑥ $س جا ص = ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س جتا ص \frac{ءص}{ءس} + جا ص = \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (س جتا ص - ١) = -جا ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-جا ص}{س جتا ص - ١}$

⑦ $جا ٢ ص = ص جتا ٢ س$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ جتا ٢ ص \frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{ءص}{ءس} جتا ٢ س + ص (-٢ جا ٢ س)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (٢ جتا ٢ ص - جتا ٢ س)$

$= -٢ ص جا ٢ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ ص جا ٢ س}{٢ جتا ٢ ص - جتا ٢ س}$

⑧ $س ص + جا ص = ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ص + س \frac{ءص}{ءس} + جتا ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (س + جتا ص) = -ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س + جتا ص}$

⑨ $٥ ص + جتا ص = س^{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٥ \frac{ءص}{ءس} - جا ص \frac{ءص}{ءس} = ٢ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س}{٥ - جا ص}$

(١٠) جا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جتا س جتا ص + جا س (− جا ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{جتا س جتا ص}}{\text{جا س جا ص}}$ = ظتا س ظتا ص

(١١) ٣ ص = جا ٢ س جتا ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = جا ٢ س × − جا ص $\frac{ءص}{ءس}$

+ جتا ص × ٢ جتا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٣ + جا ص جا ٢ س) = ٢ جتا ص جتا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{٢ جتا ص جتا ٢ س}}{\text{٣ + جا ص جا ٢ س}}$

(١٢) س جتا ص + ص جتا س = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جتا ص + س (− جا ص) $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ جتا س

+ ص (− جا س) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س جا ص + جتا س)

= − جتا ص + ص جا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{ص جا س − جتا ص}}{\text{جتا س − س جا ص}}$

(١٣) س^{٢} جا ص − ص^{٢} جا س = ٩

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س جا ص + س^{٢} جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$

− ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$. جا س − ص^{٢} جتا س = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س^{٢} جتا ص − ٢ ص جا س)

= ص^{٢} جتا س − ٢ س جا ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{ص^{٢} جتا س − ٢ س جا ص}}{\text{س^{٢} جتا ص − ٢ ص جا س}}$

(١٤) س قتا ص = ص ظتا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ قتا ص + س (− قتا ص ظتا ص) $\frac{ءص}{ءس}$

= $\frac{ءص}{ءس}$ ظتا س + ص (− قتا^{٢} س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س قتا ص ظتا ص − ظتا س)

= − قتا ص − ص قتا^{٢} س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{قتا ص + ص قتا^{٢} س}}{\text{س قتا ص ظتا ص + ظتا س}}$

(١٥) ظا ٢ س + ظتا ص = س ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ قا^{٢} ٢ س + (− قتا^{٢} ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = ص + س $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س + قتا^{٢} ص) = ٢ قا^{٢} (٢ س) − ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{٢ قا^{٢} (٢ س) − ص}}{\text{س + قتا^{٢} ص}}$

(١٦) جا^{٢} س + ٢ جتا ص + س ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جا س جتا س + ٢ (− جا ص) $\frac{ءص}{ءس}$

+ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س − ٢ جا ص) = − ص − ٢ جا س جتا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ص − ٢ جا س جتا س}}{\text{س − ٢ جا ص}}$

(١٧) ص قا س + ظا س + س^{٢} ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ قا س + ص قا س ظا س + قا^{٢} س

+ ٢ س ص + س^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (قا س + س^{٢})

= − ص قا س ظا س − قا^{٢} س − ٢ س ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ص قا س ظا س − قا^{٢} س − ٢ س ص}}{\text{قا س + س^{٢}}}$

(١٨) أ جتا س + ب جا أ ص = جـ

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ − أ ب جا س + أ ب جتا أ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا أ ص}}$

٣

(١) ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ٥ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س + ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ٢ س}}{\text{٣ ص}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، -١)}$ = $\frac{٢}{٣}$

(٢) س^{٢} − ٣ س ص + ص^{٢} = ١١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ٣ س $\frac{ءص}{ءس}$ − ٣ ص + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ ص − ٣ س) = ٣ ص − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{٣ ص − ٢ س}}{\text{٢ ص − ٣ س}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، -١)}$ = $\frac{٧}{٨}$

(٣) س ص^{٣} = ٣ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص^{٣} + س (٣ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ص^{٣}}}{\text{٣ س ص^{٢}}}$ = $\frac{\text{− ص}}{\text{٣ س}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ١)}$ = $\frac{-١}{٩}$

(٤) س^{٤} − ٢ س^{٣} ص^{٢} + س ص^{٣} = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} ص^{٢} − ٢ س^{٣} (٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$)

+ س (٣ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$) + ص^{٣} = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− ٤ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢})

= − ص^{٣} + ٦ س^{٢} ص^{٢} − ٤ س^{٣}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ص^{٣} + ٦ س^{٢} ص^{٢} − ٤ س^{٣}}}{\text{− ٤ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢}}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٢)}$ = ٣

(٥) س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٢٧

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − س $\frac{ءص}{ءس}$ − ص + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س + ٢ ص) = ص − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{ص − ٢ س}}{\text{− س + ٢ ص}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ١)}$ غير معرف

(٦) س $\sqrt{\text{ص}}$ + ص $\sqrt{\text{س}}$ = ٦

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س $\left(\frac{١}{٢}\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{ءس}\right)$ + ص $\frac{١}{٢}$ + ص $\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}\right)$

+ س $\frac{١}{٢}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{٢ ص}} + \sqrt{\text{س}}\right)$ = $\frac{\text{− ص}}{\text{٢ س}}$ − $\sqrt{\text{ص}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ص / ٢ س − } \sqrt{\text{ص}}}{\text{س / ٢ ص + } \sqrt{\text{س}}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ١)}$ = $\frac{-١٦}{٥}$

(٧) جتا $\sqrt{\pi \text{ ص}}$ = ٣ س + ١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ − جا $\sqrt{\pi \text{ ص}}$ × $\frac{\pi}{٢\sqrt{\pi \text{ ص}}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{− ٦ $\sqrt{\pi \text{ ص}}$}}{\pi \text{ جا } \sqrt{\pi \text{ ص}}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{\pi}{٤} ، \frac{١}{٢})}$ = $\frac{\text{− ٦ $\frac{\pi}{٢}$}}{\pi \text{ جا } \frac{\pi}{٢}}$ = − ٣

(٨) $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}$ + $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ = ١ بالضرب × أ^{٢} ب^{٢}

∴ ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ب^{٢} س + ٢ أ^{٢} ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ب^2 س}{أ^2 ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(أ جاهـ ، ب جاهـ)} = \frac{-ب^2 أ جاهـ}{أ^2 ب جاهـ}$

$= \frac{-ب}{أ}$ ظاهـ

٤

① $س^2 - ٣ س ص + ص^2 = ٥$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢ س - ٣ س \frac{ءص}{ءس} - ٣ ص + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس}(-٣ س + ٢ ص) = ٣ ص - ٢ س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ ص - ٢ س}{-٣ س + ٢ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ١)} = ١$

∴ ظاهـ = ١ ∴ ق (∠هـ) = ٤٥°

② $س^2 - س^2 ص - س - ٣ ص = ٠$

∴ $٣ س^2 - س^2 \frac{ءص}{ءس} - ٢ س ص - ١ - ٣ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس}(-٣ - س^2) = ٢ س ص + ١ - ٣ س^2$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س ص + ١ - ٣ س^2}{-٣ - س^2}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٠)} = \frac{١}{٢}$

∴ ظاهـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (∠هـ) ≈ ٢٦° ٣٤′

③ $\frac{س}{ص} - \frac{٤ ص}{س} = ٣$ بالضرب × (س ص)

∴ $س^2 - ٤ ص^2 = ٣ س ص$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢ س - ٨ ص \frac{ءص}{ءس} = ٣ س \frac{ءص}{ءس} + ٣ ص$

∴ $\frac{ءص}{ءس}(٣ س + ٨ ص) = ٢ س - ٣ ص$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س - ٣ ص}{٣ س + ٨ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -١)} = -١$

∴ ظاهـ = −١ ∴ ق (∠هـ) = ١٣٥°

④ جا ٢ س = ظا ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جتا ٢ س = $قا^2$ ص $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ جتا ٢ س}{قا^2 ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\left(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤}\right)}$ = صفر

∴ ظاهـ = صفر ∴ ق (∠هـ) = صفر°

ثانيًا مسائل على الاشتقاق البارامترى

٥

① س = ٥ ن + ٣ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٥$

، ص = ١٦ $ن^2$ + ٩ $\frac{ءص}{ءن} = ٣٢ ن$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣٢ ن}{٥}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=٥} = \frac{٣٢ \times ٥}{٥} = ٣٢$

② س = ١ $ن^2$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ ١ ن$

، ص = ٢ $١ ن^6$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ١٢ ١ ن^5$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{١٢ ١ ن^5}{٢ ١ ن} = ٦ ن^4$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=١} = ٦$

③ س = ٤ ن ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٤$

، ص = $\frac{٤}{ن}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٤}{ن^2}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{-٤}{ن^2} \div ٤ = \frac{-١}{ن^2}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=٢} = \frac{-١}{٩}$

④ س = (ن + ٧) (ن − ٢) منها س = $ن^2$ + ٥ ن − ١٤

∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ ن + ٥$

ص = ($ن^2$ + ١) (ن − ٢)

منها ص = $ن^3$ − ٢ $ن^2$ + ن − ٢

∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٣ ن^2 - ٤ ن + ١$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣ ن^2 - ٤ ن + ١}{٢ ن + ٥}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=١} = \frac{٣ - ٤ + ١}{٢ + ٥}$ = صفر

⑤ س = $\sqrt{٣ ن - ٢}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣ ن - ٢}}$

، ص = $\sqrt{٤ ن + ١}$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤ ن + ١}} = \frac{٢}{\sqrt{٤ ن + ١}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٤ ن + ١}} \div \frac{٣}{٢\sqrt{٣ ن - ٢}}$

$= \frac{٤\sqrt{٣ ن - ٢}}{٣\sqrt{٤ ن + ١}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءن}\right)_{ن=٢} = \frac{٤\sqrt{٣ \times ٢ - ٢}}{٣\sqrt{٤ \times ٢ + ١}} = \frac{٨}{٩}$

٦

① س = ٣ جتا ٢ θ ∴ $\frac{ءس}{ءθ} = -٦ جا ٢ θ$

، ص = ٤ جا ٢ θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = ١٢ جتا ٢ θ$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءθ} \div \frac{ءس}{ءθ} = \frac{١٢ جتا ٢ θ}{-٦ جا ٢ θ} = \frac{-٢ جتا ٢ θ}{جا ٢ θ}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ=\frac{\pi}{٤}} = \frac{-٢ جتا \frac{٢\pi}{٤}}{جا \frac{٢\pi}{٤}} = \sqrt{٢}$

② س = جا ٢ π θ

∴ $\frac{ءس}{ءθ} = ٢ π جتا ٢ π θ$ ، ص = جتا ٢ π θ

∴ $\frac{ءص}{ءθ} = -٢ π جا ٢ π θ$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءθ} \div \frac{ءس}{ءθ} = \frac{-٢ π جا ٢ π θ}{٢ π جتا ٢ π θ}$

$= -ظا ٢ π θ$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ=\frac{١}{٢}} = -\sqrt{٣}$

③ س = ٥ $جا^3$ θ

∴ $\frac{ءس}{ءθ} = ١٥ جا^2 θ \times -جا θ = -١٥ جا^3 θ جتا θ$

، ص = ٤ $جا^3$ θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = ٨ جا^2 θ \times جتا θ$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءθ} \div \frac{ءس}{ءθ} = \frac{٨ جا^2 θ جتا θ}{-١٥ جا^2 θ جتا θ} = \frac{-٨}{١٥}$

④ س = ١ $جتا^3$ θ

∴ $\frac{ءس}{ءθ} = ٣ جتا^2 θ \times -جا θ$

$= -٣ جتا^2 θ جا θ$

، ص = ١ $جا^3$ θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = ٣ جا^2 θ \times جتا θ$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءθ} \div \frac{ءس}{ءθ} = \frac{٣ جا^2 θ جتا θ}{-٣ جتا^2 θ جا θ} = -ظا θ$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ=\frac{\pi}{٢}} = -١$

⑤ س = ٥ + $قا^2$ ٢ θ

∴ $\frac{ءس}{ءθ} = ٢ قا ٢ θ . قا ٢ θ ظا ٢ θ \times ٢$

$= ٦ قا^2 ٢ θ ظا ٢ θ$

، ص = ١ − ظا ٢ θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = -٢ قا^2 ٢ θ$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ قا^2 ٢ θ}{٦ قا^2 ٢ θ ظا ٢ θ} = \frac{-١}{٣ ظا ٢ θ}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ=\frac{\pi}{٢}} = \frac{-١}{٣ ظا \frac{٢\pi}{٢}} = \frac{١}{٣}$

⑥ س = $قا^2$ θ − ١

∴ $\frac{ءس}{ءθ} = ٢ قا θ قا θ ظا θ = ٢ قا^2 θ ظا θ$

، ص = ظا θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = قا^2 θ$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءθ} \div \frac{ءس}{ءθ} = \frac{قا^2 θ}{٢ قا^2 θ ظا θ} = \frac{١}{٢ ظا θ}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ=\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{٢}$

⑦ س = ١ قا θ ∴ $\frac{ءس}{ءθ} = ١ قا θ ظا θ$

، ص = ب ظا θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = ب قا^2 θ$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ب قا}^2\theta}{\text{أ قا}\theta\ \text{ظا}\theta} = \frac{\text{ب قا}\theta}{\text{أ}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\ \text{ب}}{\text{أ}}$

٨ $\text{س} = \text{جتا}\theta + \text{جتا}2\theta$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}} = -\text{جا}\theta - 2\,\text{جا}2\theta$

، $\text{ص} = \text{جا}\theta + \text{جا}2\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا}\theta + 2\,\text{جتا}2\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}} = \frac{\text{جتا}\theta + 2\,\text{جتا}2\theta}{-\text{جا}\theta - 2\,\text{جا}2\theta}$

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

٩ $\text{س} = 3\,\text{جتا}\theta - 2\,\text{جتا}^3\theta$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}} = -3\,\text{جا}\theta + 6\,\text{جتا}^2\theta\ \text{جا}\theta$

، $\text{ص} = 3\,\text{جا}\theta - 2\,\text{جا}^3\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}} = 3\,\text{جتا}\theta - 6\,\text{جا}^2\theta\ \text{جتا}\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{3\,\text{جتا}\theta - 6\,\text{جا}^2\theta\ \text{جتا}\theta}{-3\,\text{جا}\theta + 6\,\text{جتا}^2\theta\ \text{جا}\theta}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{\text{صفر} - \text{صفر}}{-3 + 6 \times \text{صفر} \times 1} = \text{صفر}$

١٠ $\text{س} = \text{أ}(\text{جتا}\theta + \theta\ \text{جا}\theta)$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}} = \text{أ}(-\text{جا}\theta + \text{جا}\theta + \theta\ \text{جتا}\theta)$

$= \text{أ}\,\theta\ \text{جتا}\theta$

، $\text{ص} = \text{أ}(\text{جا}\theta - \theta\ \text{جتا}\theta)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}} = \text{أ}(\text{جتا}\theta - \text{جتا}\theta + \theta\ \text{جا}\theta)$

$= \text{أ}\,\theta\ \text{جا}\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{أ}\,\theta\ \text{جا}\theta}{\text{أ}\,\theta\ \text{جتا}\theta} = \text{ظا}\theta$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

٧

① بوضع : $\text{ص} = 4\,\text{س}^3 - 9\,\text{س}^2 + 5$

، $\text{ع} = 3\,\text{س}^2 + 7$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 12\,\text{س}^2 - 18\,\text{س}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 6\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{12\,\text{س}^2 - 18\,\text{س}}{6\,\text{س}}$

$= 2\,\text{س} - 3$

② بوضع : $\text{ص} = (\text{س} + 3)(\text{س} - 2)$

$= \text{س}^2 + \text{س} - 6$

، $\text{ع} = \frac{\text{س} - 3}{\text{س} + 2}$ $\qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{س} + 1$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + 2) \times 1 - (\text{س} - 3) \times 1}{(\text{س} + 2)^2}$

$= \frac{5}{(\text{س} + 2)^2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = (2\,\text{س} + 1) \div \frac{5}{(\text{س} + 2)^2}$

$= \frac{1}{5}(2\,\text{س} + 1)(\text{س} + 2)^2$

③ بوضع : $\text{ص} = \frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}$ ، $\text{ع} = \sqrt{2\,\text{س} + 1}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - 1)(1) - (\text{س} + 1)(1)}{(\text{س} - 1)^2} = \frac{-2}{(\text{س} - 1)^2}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{2}{2\sqrt{2\,\text{س} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2\,\text{س} + 1}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{-2}{(\text{س} - 1)^2} \div \frac{1}{\sqrt{2\,\text{س} + 1}}$

$= \frac{-2\sqrt{2\,\text{س} + 1}}{(\text{س} - 1)^2}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right)_{\text{س} = 4} = \frac{-2\sqrt{2(4) + 1}}{(4 - 1)^2} = \frac{-2}{3}$

④ بوضع : $\text{ص} = \text{س} - \text{جا}\text{س}$ ، $\text{ع} = 1 - \text{جتا}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 - \text{جتا}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{جا}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{1 - \text{جتا}\text{س}}{\text{جا}\text{س}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ثالثا مسائل متنوعة

٨

① -1 ② 18 ③ $\frac{3}{8}$ ④ 10 ⑤ 6 ⑥ $\frac{-10}{27}$

٩

① (د)	② (د)	③ (د)	④ (ب)	⑤ (د)
⑥ (أ)	⑦ (أ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (جـ)	⑫ (جـ)	⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (د)	㉒ (د)			

١٠

$\text{ص} = (\text{س}^3 + 2)^7$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ص

$\therefore 1 = 7(\text{س}^3 + 2)^6 \times 3\,\text{س}^2 \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{1}{21\,\text{س}^2(\text{س}^3 + 2)^6} \times \frac{(\text{س}^3 + 2)}{(\text{س}^3 + 2)}$

$= \frac{(\text{س}^3 + 2)}{21\,\text{س}^2(\text{س}^3 + 2)^7} = \frac{\text{س}^3 + 2}{21\,\text{س}^2\,\text{ص}}$

١١

$\text{س} = (\text{ص}^3 - 1)^5$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = 5(\text{ص}^3 - 1)^4 \times 3\,\text{ص}^2 \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{15\,\text{ص}^2(\text{ص}^3 - 1)^4} \times \frac{(\text{ص}^3 - 1)}{(\text{ص}^3 - 1)}$

$= \frac{\text{ص}^3 - 1}{15\,\text{ص}^2(\text{ص}^3 - 1)^5} = \frac{\text{ص}^3 - 1}{15\,\text{س}\,\text{ص}^2}$

١٢

$\frac{2}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}} = \frac{5}{1}$

$\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = \frac{2}{5}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س}^{-\frac{1}{2}}}{\text{ص}^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$ $\qquad \therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

١٣

$(\text{ص} - \text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\text{ن}(\text{ص} - \text{أ})^{\text{ن} - 1} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{ن}(\text{س} - \text{أ})^{\text{ن} - 1} = \text{صفر}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - \text{أ})^{\text{ن} - 1}}{(\text{ص} - \text{أ})^{\text{ن} - 1}} = \left(\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{ص} - \text{أ}}\right)^{\text{ن} - 1}$

١٤

$\text{ص}^2 + 2\,\text{أ}\,\text{س} - \text{أ}^2 = 0$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2\,\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 2\,\text{أ} = \text{صفر}$ $\qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ص}}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \left(\frac{-\text{أ}}{\text{ص}}\right)^2 + \frac{2\,\text{س}}{\text{ص}}\left(\frac{-\text{أ}}{\text{ص}}\right)$

$= \frac{\text{أ}^2 - 2\,\text{أ}\,\text{س}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2} = 1$

١٥

$\text{ص}^2 = \text{س} + \sqrt{1 + \text{س}^2}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2\,\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 + \frac{\text{س}}{\sqrt{1 + \text{س}^2}}$

بالضرب $\times \left(\sqrt{1 + \text{س}^2}\right)$

$2\,\text{ص}\sqrt{1 + \text{س}^2}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{1 + \text{س}^2} + \text{س}$

$2\,\text{ص}\sqrt{1 + \text{س}^2}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}^2$

$\therefore 2\sqrt{1 + \text{س}^2}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}$

٢١

ص = $\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}-1} \times \left[\frac{(\text{س}^2 + 2)(2\text{س}) - (\text{س}^2 - 2)(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 2)^2}\right]$

$= \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}-1} \left[\frac{8\text{س}}{(\text{س}^2 + 2)^2}\right]$

$= \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}} \left(\frac{\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 - 2}\right)\left(\frac{8\text{س}}{(\text{س}^2 + 2)^2}\right)$

$= \text{ن ص} \times \frac{8\text{س}}{\text{س}^4 - 4} = \frac{8\text{ن س ص}}{\text{س}^4 - 4}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{\text{س}^4 - 4}{8\text{ن س ص}}$

٢٢

ص = $\text{جا}^2\theta$ ، ع = $\text{جتا}^2\theta$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى θ)

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = 2\,\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ء}\theta} = -2\,\text{جتا}\theta\,\text{جا}\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ء}\theta} = \frac{2\,\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}{-2\,\text{جتا}\theta\,\text{جا}\theta} = -\text{ظا}\theta$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} + \text{ظا}\theta = \text{صفر}$

٢٣

س = أ $\left(\text{ن} + \frac{1}{\text{ن}}\right)$ ، ص = أ $\left(\text{ن} - \frac{1}{\text{ن}}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{أ}\left(1 - \frac{1}{\text{ن}^2}\right)$ ، $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{أ}\left(1 + \frac{1}{\text{ن}^2}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$= \left[\text{أ}\left(1 + \frac{1}{\text{ن}^2}\right)\right] \div \left[\text{أ}\left(1 - \frac{1}{\text{ن}^2}\right)\right]$

$= \frac{\text{ن}^2 + 1}{\text{ن}^2 - 1} \times \frac{\text{ن}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^2 + 1}{\text{ن}^2 - 1}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

٢٤

س = $2\text{ع}^3 - 5\text{ع}^2 - 4\text{ع} + 12$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = 6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4$

، ص = $2\text{ع}^2 + \text{ع} - 4$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 4\text{ع} + 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = \frac{4\text{ع} + 1}{6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4}$

في حالة المماس أفقي :

$\therefore$ ميله = ٠ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

$\therefore \frac{4\text{ع} + 1}{6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4} = 0$ $\therefore \text{ع} = \frac{-1}{4}$

في حالة المماس رأسي :

ميله غير معرف

$\therefore 6\text{ع}^2 - 10\text{ع} - 4 = 0$

$\therefore 3\text{ع}^2 - 5\text{ع} - 2 = 0$

$\therefore (3\text{ع} + 1)(\text{ع} - 2) = 0$

$\therefore \text{ع} = \frac{-1}{3}$ أو ع = ٢

٢٥

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 3\text{ن}^2 - 14\text{ن} + 16$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 6\text{ن}^2 - 6\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{6\text{ن}^2 - 6\text{ن}}{3\text{ن}^2 - 14\text{ن} + 16}$

في حالة المماس رأسي :

$\therefore$ الميل غير معرف $\therefore 3\text{ن}^2 - 14\text{ن} + 16 = 0$

$\therefore (3\text{ن} - 8)(\text{ن} - 2) = 0$

$\therefore \text{ن} = \frac{8}{3}$ أو ن = ٢

في حالة المماس أفقي :

$\therefore$ الميل = ٠ $\therefore 6\text{ن}^2 - 6\text{ن} = 0$

$\therefore 6\text{ن}(\text{ن} - 1) = 0$ $\therefore \text{ن} = 0$ أو ن = ١

٢٦

س = (١ − ص) (١ + ص + ص^2)

$\therefore$ س = ١ − ص^3 (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = -3\text{ص}^2 \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-1}{3\text{ص}^2}$

٢٧

جا س جتا ص − جا ص جتا س = ١

جا (س − ص) = ١ $\therefore$ س − ص = $\frac{\pi}{2}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore 1 - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$

٢٨

جا^2 س + جتا^2 ص = $\frac{1}{4}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى ص)

$2\,\text{جا س جتا س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} - 2\,\text{جتا ص جا ص} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{2\,\text{جتا ص جا ص}}{2\,\text{جا س جتا س}} = \frac{\text{جا ٢ص}}{\text{جا ٢س}}$

$= \text{جا ٢ص قتا ٢س}$

٢٩

س = جتا^{-1} (س ص) (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = -\text{جا (س ص)} \times \left(\text{ص} + \text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$

$1 = -\text{ص جا (س ص)} - \text{س جا (س ص)} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1 + \text{ص جا (س ص)}}{-\text{س جا (س ص)}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{1 + \text{ص جا (س ص)}}{\text{س جا (س ص)}}$

٣٠

① نفرض ص = د (س) دالة زوجية

$\therefore$ د (− س) = د (س)

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore$ د′ (− س) × − ١ = د′ (س)

$\therefore$ د′ (− س) = − د′ (س)

$\therefore$ د′ (س) تمثل دالة فردية

② نفرض ص = د (س) دالة فردية

$\therefore$ د (− س) = − د (س)

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore$ د′ (− س) × − ١ = − د′ (س)

$\therefore$ د′ (− س) = د′ (س)

$\therefore$ د′ (س) تمثل دالة زوجية

٣١

① (د) ② (أ) ③ (أ)

④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)

إرشادات لحل رقم ٣١

① $\because$ د (س) = ر (س^2)

$\therefore$ د′ (س) = ر′ (س^2) × ٢ س

، عند س = ٢ $\therefore$ د′ (٢) = ر′ (٤) × ٤

$\therefore \frac{\text{د′ (٢)}}{\text{ر′ (٤)}} = 4$

② $\because$ الدالة ر هي الدالة العكسية للدالة د

$\therefore$ ر [د (س)] = س بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ ر′ [د (س)] × د′ (س) = ١

وعند س = أ

$\therefore$ ر′ [د (أ)] × د′ (أ) = ١

$\therefore$ ر′ (س) × ٢ = ١ $\therefore$ ر′ (س) = $\frac{1}{2}$

③ $\because$ ص = د (ظا س)

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س} \times \text{د′ (ظا س)}$

عند س = $\frac{\pi}{4}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د′ (١)} \times 2 = 4$

$\therefore$ د′ (ظا س)

∴ $\frac{ع}{س} = قا^2 س \, ظا س \times س' (قا س)$

، عند $س = \frac{\pi}{4}$

∴ $\frac{ع}{س} = \sqrt{2} \times س' (\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$

∴ $\frac{ص}{ع} = \frac{ص}{س} \times \frac{س}{ع}$ ، عند $س = \frac{\pi}{4}$

∴ $\frac{ص}{ع} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $ص = \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + \cdots}}}$ بالتربيع

∴ $ص^2 = س + \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + \cdots}}}$

∴ $ص^2 = س + ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2ص \frac{ص}{س} = 1 + \frac{ص}{س}$

منها $\frac{ص}{س}(2ص - 1) = 1$

∴ $\frac{ص}{س} = \frac{1}{2ص - 1}$

⑤ $س = \sqrt{ظا ص + \sqrt{ظا ص + \sqrt{ظا ص + \cdots}}}$ بالتربيع

∴ $س^2 = ظا ص + \sqrt{ظا ص + \sqrt{ظا ص + \cdots}}$

∴ $س^2 = ظا ص + س$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $2س = قا^2 ص \frac{ص}{س} + 1$

$\frac{ص}{س} = \frac{2س - 1}{قا^2 ص} = (2س - 1) جتا^2 ص$

⑥ ∵ $(د \circ د')(س) = د[د'(س)] = د(2س)$

$= 4س^2$

∴ $(د \circ د)'(س) = 8س$

∴ $(د \circ د)'(1) = 8$

٤٧

$س = جا ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = جتا ص \frac{ص}{س}$

∴ $\frac{ص}{س} = \frac{1}{جتا ص}$ $\left(∵ جتا ص = \sqrt{1 - جا^2 ص}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{1 - جا^2 ص}} = \frac{1}{\sqrt{1 - س^2}}$

٤٨

$ص = د(ر(س))$

$\frac{ص}{س} = د'(ر(س)) \times ر'(س)$ (١)

، ∵ $د'(س) = \frac{س}{\sqrt{س^2 + 1}}$ ، $ر'(س) = \frac{1}{س}$

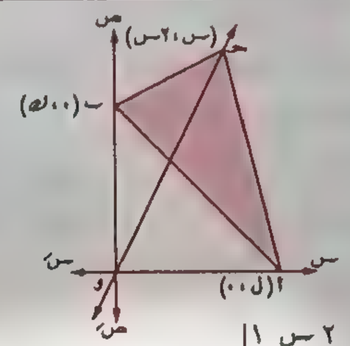
∴ $د'(ر(س)) = \frac{ر(س)}{\sqrt{(ر(س))^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{س}}{\sqrt{\frac{1}{س^2} + 1}}$

$= \frac{\frac{1}{س}}{\frac{\sqrt{س^2 + 1}}{س^2}} = \frac{\frac{1}{س}}{\left|\frac{1}{س}\right| \sqrt{س^2 + 1}}$

ومن (١) : $\frac{ص}{س} = \frac{\frac{1}{س}}{\left|\frac{1}{س}\right| \sqrt{س^2 + 1}} \times -س^{-2}$

$= \begin{cases} \frac{-1}{س^2 \sqrt{س^2 + 1}} & ، س > 0 \\ \frac{1}{س^2 \sqrt{س^2 + 1}} & ، س < 0 \end{cases}$

٤٩



∵ $\begin{vmatrix} س & 2س & 1 \\ ل & 0 & 1 \\ 0 & ك & 1 \end{vmatrix} = س(0 - ك) - 2س(ل - 0) + 1(ل ك - 0)$

$= -ك س - 2ل س + ك ل$

$= -(2ل + ك) س + ك ل$

∴ مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{1}{2}\left|-(2ل + ك) س + ك ل\right|$

$= \left|-\left(ل + \frac{ك}{2}\right) س + \frac{1}{2} ك ل\right|$

∴ المساحة م

$= \begin{cases} -\left(ل + \frac{ك}{2}\right) س + \frac{1}{2} ك ل & ، س < \frac{ك ل}{ك + 2ل} \\ \left(ل + \frac{ك}{2}\right) س - \frac{1}{2} ك ل & ، س > \frac{ك ل}{ك + 2ل} \end{cases}$

∴ $\frac{م}{س} = \begin{cases} -ل - \frac{ك}{2} & ، س < \frac{ك ل}{ك + 2ل} \\ ل + \frac{ك}{2} & ، س > \frac{ك ل}{ك + 2ل} \end{cases}$

إجابات تمارين 3

١

① $ص = س^3 - 5س^2 + 6س - 4$

∴ $ص' = 3س^2 - 10س + 6$

∴ $ص'' = 6س - 10$

② $ص = (3س^2 - 4)(س + 3)$

∴ $ص' = 6س(س + 3) + 3س^2 - 4$

$= 6س^2 + 18س + 3س^2 - 4$

$= 9س^2 + 18س - 4$

∴ $ص'' = 18س + 18$

③ $ص = س^2 (س + 2)^2$

∴ $ص = (س^3 + 2س)^2$

∴ $ص' = 2(س^3 + 2س)(3س^2 + 2)$

∴ $ص'' = 2[(3س^2 + 2)(3س^2 + 2) + 2(س^3 + 2س)]$

$= 2[(3س^2 + 2)^2 + 2(س^3 + 2س)]$

$= 2(3س^2 + 2)^2 + 4(س^3 + 2س)$

$= 12س^4 + 24س^2 + 8$

④ $ص = \frac{س + 2}{س - 2}$

∴ $ص' = \frac{(س - 2)(1) - (س + 2)(1)}{(س - 2)^2}$

$= \frac{-4}{(س - 2)^2} = -4(س - 2)^{-2}$

∴ $ص'' = 8(س - 2)^{-3}$

⑤ $ص = س + \sqrt{س + 5}$

∴ $ص' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{س + 5}} = 1 + \frac{1}{2}(س + 5)^{-\frac{1}{2}}$

∴ $ص'' = -\frac{1}{4}(س + 5)^{-\frac{3}{2}}$

⑥ $ص = (س - 2)^{\frac{2}{3}}$

∴ $ص' = \frac{2}{3}(س - 2)^{-\frac{1}{3}}$

∴ $ص'' = -\frac{2}{9}(س - 2)^{-\frac{4}{3}}$

⑦ $ص = جا(5س + 1)$

∴ $ص' = 5 جتا(5س + 1)$

∴ $ص'' = -25 جا(5س + 1)$

⑧ $ص = 2س^2 + جتا 3س$

∴ $ص' = 4س - 3 جا 3س$

∴ $ص'' = 4 - 9 جتا 3س$

⑨ $ص = س جتا 2س$

∴ $ص' = -س(2 جا 2س) + جتا 2س$

$= -2س جا 2س + جتا 2س$

∴ $ص'' = -2 جا 2س - 4س جتا 2س - 2 جا 2س$

$= -4 جا 2س - 4س جتا 2س$

⑩ $ص = 9 ظا \frac{س}{3}$

∴ $ص' = 3 قا^2 \frac{س}{3}$

∴ $ص'' = 6 قا \frac{س}{3} \times \left(قا \frac{س}{3} ظا \frac{س}{3}\right) \times \frac{1}{3}$

$= 2 قا^2 \frac{س}{3} ظا \frac{س}{3}$

⑪ $ص = 2 جا^2 س - 5 جتا^2 س$

∴ $ص' = 4 جا س جتا س + 10 جتا س جا س$

$= 14 جا س جتا س = 7 جا 2س$

∴ $ص'' = 7(جتا 2س) \times 2 = 14 جتا 2س$

⑫ $ص = س جا^2 س$

∴ $ص' = س(2 جا س جتا س) + جا^2 س$

$= س جا 2س + جا^2 س$

∴ $ص'' = 2س جتا 2س + جا 2س + 2 جا س جتا س$

$= 2س جتا 2س + 2 جا 2س$

(٢) ص = ٢ جا ٢ س ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤ جا ٢ س

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = ٨ جا ٢ س

∴ $\left(\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{4}}$ = ٨

(٣) ص = جاس - جتاس

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جاس + جتاس

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = جاس - جتاس

∴ $\left(\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{2}}$ = صفر

(٤) ص = ٢ س جاس جتاس

∴ ص = س جا ٢ س

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س × ٢ جتا ٢ س + جا ٢ س

= ٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = ٢ س × -٢ جا ٢ س + ٢ جتا ٢ س

= -٤ س جا ٢ س + ٢ جتا ٢ س

∴ $\left(\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{4}}$ = ٢

(٥) ص = س جاس جتاس

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س جتاس - جاس جاس

= س جتا ٢ س

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = س × -٢ جاس جاس - جاس جتاس

∴ $\left(\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right)_{\text{س}=\frac{\pi}{2}}$ = -١

(٦) ص = $\frac{\text{س}^{١٠}}{\text{س}-١}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{(\text{س}-١)(١٠\text{س}^{٩})-\text{س}^{١٠}(١)}{(\text{س}-١)^{٢}}$

= $\frac{٩\text{س}^{١٠}-١٠\text{س}^{٩}}{(\text{س}-١)^{٢}}$ = ٢٠ (س - ١)$^{-٢}$

∴ ص" = ٤ (س - ١)$^{-٣}$

∴ ص‴ = -١٢٠ (س - ١)$^{-٤}$

(٧) ص = ٢ س + ٣ س$^{-٢}$ ∴ ص' = ٢ - ٣ س$^{-٣}$

∴ ص" = ٦ س$^{-٤}$ ∴ ص‴ = -١٨ س$^{-٥}$

(٨) ص = (٢ س - ٥)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ ص' = $\frac{١}{٢}$ (٢ س - ٥)$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢ × (٢ س - ٥)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ ص" = -$\frac{١}{٤}$ (٢ س - ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٢ × ٢ (٢ س - ٥)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ ص‴ = $\frac{٣}{٨}$ (٢ س - ٥)$^{-\frac{٥}{٢}}$ × ٢ × ٢ (٢ س - ٥)$^{\frac{١}{٢}}$

(٩) ص = جاس جاس = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

∴ ص' = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س × ٢ = جا ٢ س

∴ ص" = جا ٢ س × ٢ = ٢ جا ٢ س

∴ ص‴ = ٢ جا ٢ س × ٢ = ٤ جا ٢ س

(١٠) ص = ٢ س^{٣} + س جا ٢ س

∴ ص' = ٦ س^{٢} + س (-٢ جا ٢ س) + جا ٢ س

= ٦ س^{٢} - ٢ س جا ٢ س + جا ٢ س

∴ ص" = ١٢ س - ٤ س جا ٢ س - ٢ جا ٢ س

- ٢ جا ٢ س

= ١٢ س - ٤ س جا ٢ س - ٤ جا ٢ س

∴ ص‴ = ١٢ - ٤ س (-٢ جا ٢ س) - ٤ جا ٢ س

- ٨ جا ٢ س

= ١٢ + ٨ س جا ٢ س - ١٢ جا ٢ س

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = ١٤ (س + ٣)^{٢}

∴ $\left(\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right)_{\text{س}=-٢}$ = -١٤

---

(١) ص = س^{٥} - ٤ س^{٣} + ٣

∴ ص' = ٥ س^{٤} - ١٢ س^{٢}

∴ ص" = ٢٠ س^{٣} - ٢٤ س

∴ ص‴ = ٦٠ س^{٢} - ٢٤

(٢) ص = جاس ∴ ص' = جتاس

∴ ص" = - جاس ∴ ص‴ = - جتاس

(٣) ص = جتا (π - ٣ س)

∴ ص' = - جا (π - ٣ س) × - ٣ = ٣ جا (π - ٣ س)

∴ ص" = ٣ جتا (π - ٣ س) × - ٣

= -٩ جتا (π - ٣ س)

∴ ص‴ = -٩ (- جا (π - ٣ س)) × - ٣

= -٢٧ جا (π - ٣ س) = -٢٧ جا ٢ س

(٤) ص = (٢ س + ٧)^{٤} + جا ٢ س

∴ ص' = ٤ (٢ س + ٧)^{٣} (٢) + ٢ جتا ٢ س

= ٨ (٢ س + ٧)^{٣} + ٢ جتا ٢ س

∴ ص" = ٢٤ (٢ س + ٧)^{٢} (٢) - ٤ جا ٢ س

= ٤٨ (٢ س + ٧)^{٢} - ٤ جا ٢ س

∴ ص‴ = ٩٦ (٢ س + ٧) (٢) - ٨ جتا ٢ س

= ١٩٢ (٢ س + ٧) - ٨ جتا ٢ س

(٥) د (س) = $\frac{٢\text{س}}{\text{س}+١}$

∴ د' (س) = $\frac{٢(\text{س}+١)-٢\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}}$ = $\frac{٢}{(\text{س}+١)^{٢}}$

= ٢ (س + ١)$^{-٢}$

∴ د" (س) = -٤ (س + ١)$^{-٣}$

∴ د‴ (س) = ١٢ (س + ١)$^{-٤}$

الاستقلال بالنسبة لـ (س)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢ س^{٢} + ٢ س^{٣} = ١٢ س^{٢} + ٢ س^{٣}

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = ٢ س^{٢} + ٦ س^{٢} = ٨ س^{٢}

$\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3}$ = ٤ س + ٦ س = ١٠ س

$\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{دس}^4}$ = ١٠ س + ٢ س = ١٢ س

∴ $\frac{\text{د}^5\text{ص}}{\text{دس}^5}$ = ١٢ س + ٢ س = ١٤ س

بالتعويض في $\frac{\text{د}^5\text{ص}}{\text{دس}^5}$ = ٠

---

(١) ب (٢) جـ (٣) د (٤) جـ (٥) د (٦) د (٧) د (٨) د (٩) د (١٠) د

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

ص' = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

ص" = ٦ أ س + ٢ ب

ص‴ = ٢٨ عند س = ١

٢٨ = ٦ أ + ٢ ب منها ٣ أ + ب = ١٤ (١)

، ص‴ = ٣٤ عند س = ٢

٣٤ = ١٢ أ + ٢ ب منها ٦ أ + ب = ١٧ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن أ = ١ ، ب = ١١

ص = ٧٥ عند س = ٢

٧٥ = ٣ × ١ × ٤ + ٢ × ١١ × ٢ + جـ

∴ جـ = ١٩

ص = ٤ عند س = ١

٨ = ١ × ١^{٣} + ١١ × ١^{٢} + ١٩ × ١ + د

∴ د = -٢٢

س	ص	صَ	صً
١	٨	٤٤	٢٨
٢	٦٧	٧٥	٣٤

٧

∵ $س^٢ + ص^٢ = ١٦$ (وبالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $٢ س + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س)

∴ $٢ + ٢ ص \times \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} \times ٢ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $٢ + ٢ ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٠$

بالقسمة على ٢ ∴ $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ١ = ٠$

٨

∵ $ص^٢ + أ س^٣ - ب س = حـ$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} + ٣ أ س^٢ - ب = صفر$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ $٢ ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٦ أ س = ٠$

بالقسمة على ٢

∴ $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٣ أ س = ٠$

٩

$ص^٢ = س^٢ - س^٣$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٢ س - ٣ س^٢$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$٢ ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} = ٢ - ٦ س$

بالقسمة على ٢

∴ $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ١ - ٣ س$

∴ $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٣ س = ١$

١٠

$٤ ص^٣ = ٣ س^٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $١٢ ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٦ س$ ∴ $٢ ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = س$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $٤ ص \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١$

∴ $٤ ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + ٢ ص^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١$

١١

∵ $س^٣ + ص^٣ = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٣ س^٢ + ٣ ص^٢ صَ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ $٦ س + ٣ (٢ ص صَ \times صَ + ص^٢ صً) = ٠$

بالقسمة على ٣

∴ $ص^٢ صً + ٢ ص صَ^٢ + ٢ س = ٠$

١٢

∵ $س^٣ ص^٣ = ١$ ∴ س ص = ١

∴ $س \frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س}$

∴ $س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ \times \frac{ص}{س}$ ∴ $س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ ص$

حل آخر :

∵ س ص = ١ ∴ ص = $س^{-١}$

∴ صَ = $- س^{-٢}$ ∴ صً = $٢ س^{-٣}$

∴ $س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = س^٢ \times ٢ س^{-٣} = \frac{٢}{س} = ٢ ص$

١٣

∵ $س^٢ ص = ٢ س + ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة الى س)

∴ $س^٢ \frac{ءص}{ءس} + ٢ س ص = ٢$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ س \frac{ءص}{ءس} + ٢ س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص = ٠$

∴ $س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٤ س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص = ٠$

١٤

∵ $ص^٢ = س$ ∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ١$

∴ $ص \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ $ص \times \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} = ٠$

وبالضرب × ص

∴ $ص^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٠$

∴ $س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٠$

١٥

∵ $٢ س ص + ٣ = ٥ س^٢$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢ \left(س \frac{ءص}{ءس} + ص\right) = ١٠ س$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

∴ $٢ \left[س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس}\right] = ١٠$

∴ $س \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢ \frac{ءص}{ءس} = ٥$

١٦

∵ $ص^٢ = ١ - س^{-٢}$ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٢ س^{-٣}$ ∴ $ص \frac{ءص}{ءس} = س^{-٣}$

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} = -٣ س^{-٤}$

∴ $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ + \frac{٣}{س^٤} = صفر$

١٧

$٣ ص^٤ = ٤ س^٣$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $١٢ ص^٣ \frac{ءص}{ءس} = ١٢ س^٢$

(بالقسمة على ١٢) ∴ $ص^٣ \frac{ءص}{ءس} = س^٢$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $٣ ص^٢ \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} + ص^٣ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ س$

∴ $ص^٣ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٣ ص^٢ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = ٢ س$

(بالقسمة ÷ $ص^٢$)

∴ $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٣ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = \frac{٢ س}{ص^٢}$

١٨

ص = $س^{-١}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = - س^{-٢}$ (بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ س^{-٣}$

∴ $س^٢ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٣ س \frac{ءص}{ءس} + ص$

$= س^٢ (٢ س^{-٣}) + ٣ س (- س^{-٢}) + س^{-١}$

$= ٢ س^{-١} - ٣ س^{-١} + س^{-١} = صفر$

١٩

(١ + س) ص = س^{٢} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ (١ + س) $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٢ س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ (١ + س) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢

∴ (١ + س) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢

٢٠

ص^{٢} + س^{٢} ص^{٢} = ٨

∴ ص^{٢} (١ + س^{٢}) = ٨ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ × (١ + س^{٢}) + ص^{٢} (٢ س) = صفر

(بالقسمة على ٢ ص)

∴ (١ + س^{٢}) $\frac{ءص}{ءس}$ + س ص = صفر

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

(١ + س^{٢}) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ س) + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠

(س^{٢} + ١) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٣ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠

٢١

∵ ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٨ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ (بالقسمة على ٢)

∴ ٤ س + ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ (١)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٤ س}{ص}$ (٢)

وبالاشتقاق للعلاقة (١) مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ ٤ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + ص × $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠ (٣)

ثم نعوض من (٢) في (٣)

∴ ٤ + $\frac{١٦ س^{٢}}{ص^{٢}}$ + ص × $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠

(بالضرب × ص^{٢})

∴ ٤ ص^{٢} + ١٦ س^{٢} + ص^{٣} × $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠

∴ ٤ (ص^{٢} + ٤ س^{٢}) + ص^{٣} × $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠

∴ ٤ × ٢٥ + ص^{٣} × $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠

∴ ص^{٣} × $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ١٠٠ = ٠

٢٢

س + ص = س ص ∴ س = س ص − ص

∴ س = ص (س − ١) (١)

∴ ص = $\frac{س}{س - ١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س - ١) - س}{(س - ١)^{٢}}$ = $\frac{-١}{(س - ١)^{٢}}$

= − (س − ١)$^{-٢}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢ (س − ١)$^{-٣}$

، ∵ من (١) س − ١ = $\frac{س}{ص}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢ $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٣}$ = ٢ $\left(\frac{ص}{س}\right)^{٣}$

٢٣

ص = $\sqrt{٢ س + ٥}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢ س + ٥}}$ = (٢ س + ٥)$^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = − $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٢

= − (٢ س + ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ = $\frac{٣}{٢}$ (٢ س + ٥)$^{-\frac{٥}{٢}}$ × ٢

= ٣ (٢ س + ٥)$^{-\frac{٥}{٢}}$

الطرف الأيمن = (٢ س + ٥) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٣ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

= (٢ س + ٥) × ٣ (٢ س + ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$

+ ٣ × − (٢ س + ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$

= ٣ (٢ س + ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$ − ٣ (٢ س + ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$

= صفر

حل آخر :

∵ ص = $\sqrt{٢ س + ٥}$ ∴ ص^{٢} = ٢ س + ٥

∴ ٢ ص ص َ = ٢ ∴ ص ص َ = ١

∴ ص ص ً + ص َ^{٢} = ٠

∴ ص ص ً + ص ً ص َ + ٢ ص َ ص ً = ٠

∴ ص ص ً + ٣ ص َ ص ً = ٠ (بالضرب × ص)

∴ ص^{٢} ص ً + ٣ ص ص َ ص َ = ٠

، ∵ ص ص َ = ١ ∴ (٢ س + ٥) ص ً + ٣ ص ً = ٠

∴ (٢ س + ٥) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٣ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠

٢٤

ص = $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$

∴ ص $\sqrt{س^{٢} + ١}$ = س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

ص × $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$ + $\sqrt{س^{٢} + ١}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

بالضرب × $\sqrt{س^{٢} + ١}$

س ص + (س^{٢} + ١) $\frac{ءص}{ءس}$ = $\sqrt{س^{٢} + ١}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص + (س^{٢} + ١) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ س)

= $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$

(س^{٢} + ١) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٣ س $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$

= $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$ − ص

∴ (س^{٢} + ١) ص ً + ٣ س ص َ = صفر

٢٥

ص $\sqrt{١ + س^{٢}}$ = ١ (بتربيع الطرفين)

(١ + س^{٢}) ص^{٢} = ١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

(١ + س^{٢}) × ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^{٢} (٢ س) = ٠

(بالقسمة − (٢ ص))

(١ + س^{٢}) $\frac{ءص}{ءس}$ + س ص = ٠

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

(١ + س^{٢}) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ س) + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠

∴ (١ + س^{٢}) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٣ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠

٢٦

ص^{٢} = $\sqrt{٤ س + ١}$ (بتربيع الطرفين)

ص^{٢} = ٤ س + ١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٤ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

٣ ص^{٢} $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + ص^{٢} $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = صفر

(بالقسمة على ص^{٢})

٣ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = صفر

٢٧

ص^{٣} = ٣ س^{٤} − ٣ س^{٢} + ٥

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٣ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ س^{٣} − ٦ س (بالقسمة على ٣)

∴ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ س^{٣} − ٢ س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

ص^{٢} $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٢ ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ = ١٢ س^{٢} − ٢

ص^{٢} $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٢ ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + ٢ = ١٢ س^{٢}

٢٨

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = − جاس ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = − جتاس

∴ الطرف الأيمن

= (− جاس)^٢ − جتاس (− جتاس)

= جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ = الطرف الأيسر

٢٩

∵ ص = ٢ جتا (٣س + ١)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = −٦ جا (٣س + ١)

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −١٨ جتا (٣س + ١)

= −٩ × ٢ جتا (٣س + ١) = −٩ ص

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٩ ص = ٠

٣٠

ص = ظاس

$\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢}س

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ قاس . قاس ظاس = ٢ قا^{٢}س ظاس (١)

∵ ٢ ص (١ + ص^٢) = ٢ ظاس × (١ + ظا^{٢}س)

= ٢ ظاس × قا^{٢}س (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ ص (١ + ص^٢)

٣١

ص س = ١٠ − جتاس (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ = جاس

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ + س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ = جتاس

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتاس

٣٢

∵ ص = قاس ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قاس ظاس

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = قاس قا^{٢}س + قاس ظاس ظاس

= قا^{٣}س + قاس ظا^{٢}س

= قاس (قا^{٢}س + ظا^{٢}س)

∴ ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ($\frac{ءص}{ءس}$)^٢

= قاس . قاس (قا^{٢}س + ظا^{٢}س) + قا^{٢}س ظا^{٢}س

= قا^{٢}س (قا^{٢}س + ٢ ظا^{٢}س)

= قا^{٢}س (٣ قا^{٢}س − ٢) = ص^٢ (٣ ص^٢ − ٢)

٣٣

ص = جا ٢س ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جتا ٢س

، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −٤ جا ٢س ، $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = −٨ جتا ٢س

① ٤ ($\frac{ءص}{ءس}$)^٢ + ($\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$)^٢

= ٤ (٢ جتا ٢س)^٢ + (−٤ جا ٢س)^٢

= ١٦ جتا^٢ ٢س + ١٦ جا^٢ ٢س = ١٦ × ١ = ١٦

② $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ + ٤ $\frac{ءص}{ءس}$

= −٨ جتا ٢س + ٤ (٢ جتا ٢س)

= −٨ جتا ٢س + ٨ جتا ٢س = صفر

٣٤

ص = جا ٣س + جتا ٣س

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ جتا ٣س − ٣ جا ٣س

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = −٩ جا ٣س − ٩ جتا ٣س

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = −٢٧ جتا ٣س + ٢٧ جا ٣س

$\frac{ء^٤ص}{ءس^٤}$ = ٨١ جا ٣س + ٨١ جتا ٣س

① $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٩ ص

= −٩ جا ٣س − ٩ جتا ٣س

+ ٩ (جا ٣س + جتا ٣س) = صفر

② $\frac{ء^٤ص}{ءس^٤}$ = ٨١ جا ٣س + ٨١ جتا ٣س

= ٨١ (جا ٣س + جتا ٣س) = ٨١ ص

٣٥

ص = س جاس

$\frac{ءص}{ءس}$ = س جتاس + جاس

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = − س جاس + جتاس + جتاس

= − س جاس + ٢ جتاس

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = − س جتاس − جاس − ٢ جاس

= − س جتاس − ٣ جاس

① $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ص

= − س جاس + ٢ جتاس + س جاس = ٢ جتاس

② س $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص

= س (− س جتاس − ٣ جاس)

+ س (س جتاس + جاس) + ٢ (س جاس)

= − س^٢ جتاس − ٣ س جاس + س^٢ جتاس

+ س جاس + ٢ س جاس = صفر

③ دً (− س) = ٢ جتا (− س) − (− س) جا (− س)

= ٢ جتاس − س جاس = دً (س)

∴ دً (س) دالة زوجية.

٣٦

ص = $\frac{ع - ١}{ع}$ ، ع = س^٢ − ١

∴ ص = $\frac{س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س^٢ - ١)(٢س) - (س^٢ - ٢)(٢س)}{(س^٢ - ١)^٢}$

= $\frac{٢س}{(س^٢ - ١)^٢}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = $\frac{٢(س^٢ - ١)^٢ - ٢س \times [٢(س^٢ - ١)(٢س)]}{(س^٢ - ١)^٤}$

= $\frac{(س^٢ - ١)(٢س^٢ - ٢ - ٨س^٢)}{(س^٢ - ١)^٤}$

= $\frac{-٢ - ٦س^٢}{(س^٢ - ١)^٣}$

($\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$)$_{س = ٠}$ = ٢

٣٧

ص = $\sqrt{ع + ١}$ ، ع = س^٢ − ١٠

$\frac{ءص}{ءع}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{ع + ١}}$ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ = $\frac{س}{\sqrt{ع + ١}}$ = $\frac{س}{\sqrt{س^٢ - ٩}}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = $\frac{\frac{س}{\sqrt{س^٢ - ٩}} - س \times \frac{س}{\sqrt{س^٢ - ٩}}}{س^٢ - ٩}$

($\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$)$_{س = ٥}$ = $\frac{٥ - ٥ \times \frac{٥}{٤}}{١٦}$ = $\frac{-٩}{٦٤}$

٣٨

ص = ظا ع ، ع = ١٠ س + ٥

$\frac{ءص}{ءع}$ = قا^٢ ع ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ١٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

= ١٠ قا^٢ ع = ١٠ قا^٢ (١٠ س + ٥)

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢٠ قا (١٠ س + ٥)

× قا (١٠ س + ٥) ظا (١٠ س + ٥) × ١٠

= ٢٠٠ قا^٢ (١٠ س + ٥) ظا (١٠ س + ٥)

٣٦

ص = س^{٢} + ٢ ، ع = س^{٢} + ٣

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س^{٢} ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٢ س

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}}$ = $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ ÷ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٢ س}}{\text{٢ س}^{٢}}$ = $\frac{٢}{س}$ س$^{-١}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءص}^{٢}}$ = $\frac{٢}{س}$ س$^{-٢}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

= $\frac{٢}{س}$ س$^{-٢}$ × $\frac{١}{\text{٢ س}^{٢}}$ = $\frac{٢}{٩}$ س$^{-١}$

$\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءص}^{٢}}\right)_{س=١}$ = $\frac{٢}{٩}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-١}$ = ١٨

٣٧

س = ٢ لـ^{٢} − ١ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءلـ}}$ = ٦ لـ

، ص = لـ^{٣} + ٢ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءلـ}}$ = ٣ لـ^{٢}

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءلـ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءلـ}}$ = $\frac{\text{٣ لـ}^{٢}}{\text{٦ لـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ لـ

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\text{ءلـ}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\text{٦ لـ}}$ = $\frac{١}{\text{١٢ لـ}}$

$\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{\text{لـ}=٤}$ = $\frac{١}{٤٨}$

٣٨

س = ٢ لـ^{٣} + ٣ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءلـ}}$ = ٦ لـ^{٢}

ص = لـ^{٤} ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءلـ}}$ = ٤ لـ^{٣}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءلـ}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءلـ}}$ = $\frac{\text{٤ لـ}^{٣}}{\text{٦ لـ}^{٢}}$ = $\frac{٢}{٣}$ لـ

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{\text{ءلـ}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١}{\text{٦ لـ}^{٢}}$ = $\frac{١}{\text{٩ لـ}^{٢}}$

$\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{\text{لـ}=١}$ = $\frac{١}{٩}$

٣٩

س = ع^{٢} − ٢ ع ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ = ٢ ع − ٢

، ص = ع^{٢} ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ٢ ع

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ = $\frac{\text{٢ ع}}{\text{٢ ع − ٢}}$ = $\frac{ع}{ع − ١}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = $\frac{(ع − ١)(١) − ع(١)}{(ع − ١)^{٢}}$ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= $\frac{−١}{(ع − ١)^{٢}}$ × $\frac{١}{\text{٢ ع − ٢}}$ = $\frac{−١}{\text{٢ (ع − ١)}^{٢}}$

= − $\frac{١}{٢}$ (ع − ١)$^{-٢}$

$\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{ع=٢}$ = $\frac{−١}{٢}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = $\frac{٢}{٢}$ (ع − ١)$^{-٢}$ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= $\frac{٢}{٢}$ (ع − ١)$^{-٢}$ × $\frac{١}{\text{٢ ع − ٢}}$ = $\frac{٢}{٤}$ (ع − ١)$^{-٣}$

$\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{ع=٢}$ = $\frac{٢}{٤}$

٤٢

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ١ + ٢ س ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س^{٢} + ٣

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}}$ = $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ ÷ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١ + ٢ س}}{\text{س}^{٢} + ٣}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءص}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ (س}^{٢} + ٣) − (١ + ٢ س)(٢ س)}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

$\frac{\text{٢ س}^{٢} − \text{٢ س} + ٦}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$ × $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ٣}$

$\frac{\text{٢ س}^{٢} − \text{٢ س} + ٦}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$

∴ $\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءص}^{٢}}\right)_{س=١}$ = $\frac{١}{٣٢}$

٤٤

ص = $\frac{\text{٢ س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ ، ع = $\frac{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}{س}$

∴ ص × ع = ٢

∴ ص = ٢ ع$^{-١}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ ع$^{-٢}$. $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = $\frac{−٢}{ع^{٢}}$. $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٤٥

ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = ٢ − ٢ لـ^{٢} ، لـ = ١ − س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = $\frac{١}{\text{٢}\sqrt{ع}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءلـ}}$ = −٤ لـ ، $\frac{\text{ءلـ}}{\text{ءس}}$ = ١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$. $\frac{\text{ءع}}{\text{ءلـ}}$. $\frac{\text{ءلـ}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{\text{٢}\sqrt{ع}}$ × ١ لـ × −٤ = $\frac{\text{−٨ لـ}}{\sqrt{ع}}$

∴ $\sqrt{ع}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٨ لـ

∴ ص × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٨ لـ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٨ $\frac{\text{ءلـ}}{\text{ءس}}$

∴ ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢}$ = −٨ × ٤

ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢}$ + ٣٢ = ٠

حل آخر :

∵ ع = ٣ − ٢ (٤ س)^{٢} = ٣ − ٣٢ س^{٢}

∴ ص^{٢} = ٣ − ٣٢ س^{٢} (بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٦٤ س

∴ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٣٢ س = ٠

(بالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة لـ س)

∴ ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢}$ + ٣٢ = ٠

٤٦

س = قا ع ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ = قا ع ظا ع

، $\sqrt{ص}$ = ظا ع ∴ ص = ظا^{٢} ع

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ٢ ظا ع قا^{٢} ع

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ = $\frac{\text{٢ ظا ع قا}^{٢}\text{ع}}{\text{قا ع ظا ع}}$ = ٢ قا ع

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٢ قا ع ظا ع × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= ٢ قا ع ظا ع × $\frac{١}{\text{قا ع ظا ع}}$ = ٢

= الطرف الأيسر

حل آخر

∵ س = ظا ع ∴ س^{٢} = ظا^{٢} ع

، ∵ $\sqrt{ص}$ = ظا ع ∴ ص = ظا^{٢} ع

∴ ظا^{٢} ع = ١ + ظا^{٢} ع ∴ س^{٢} = ١ + ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س ∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٢

٤٧

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (د)

(٥) (ب) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (ب)

(٩) (د) (١٠) (ب) (١١) (ب) (١٢) (ب)

(١٣) (د) (١٤) (د) (١٥) (ب) (١٦) (د)

(١٧) (ب) (١٨) (ب) (١٩) (ب) (٢٠) (ب)

(٢١) (أ) (٢٢) (ب) (٢٣) (ب) (٢٤) (د)

(٢٥) (ب) (٢٦) (ب) (٢٧) (ب) (٢٨) (أ)

(٢٩) (أ)

٤٨

∵ س ص = ما س ما س

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ ما ٢ س

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ ١ × ص + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × س = ما ٢ س

وبالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ × س + ١ × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ ما ٢ س

∴ س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + ٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٢ ما ٢ س = ٠

∵ ٢ ما ٢ س = ٤ س ص

∴ س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + ٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٤ س ص = ٠

٤٩

∵ جاس = س ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جتاس = س صَ + ص (١)

∴ صَ = $\frac{\text{جتاس} - \text{ص}}{\text{س}}$

وبالاشتقاق للعلاقة (١) مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ − جاس = س صً + صَ + صَ

∴ − جاس = س صً + ٢ صَ

∴ − س ص = س صً + ٢ × $\left(\frac{\text{جتاس} - \text{ص}}{\text{س}}\right)$

∴ − س^{٢} ص = س^{٢} صً + ٢ جتاس − ٢ ص

∴ س^{٢} (ص + صً) + ٢ جتاس = ٢ ص

٥٠

ص = س ظاس (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س قا^{٢} س + ظاس

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = س × ٢ قاس . قاس ظاس + قا^{٢} س + قا^{٢} س

= ٢ س قا^{٢} س ظاس + ٢ قا^{٢} س

= ٢ قا^{٢} س (١ + س ظاس)

= ٢ (١ + ص) قا^{٢} س

٥١

س ص = ما أ س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص = أ جتا أ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − أ^{٢} جا أ س

س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + ٢ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ = − أ^{٢} × س ص

∴ س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + ٢ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ + أ^{٢} س ص = ٠

٥٢

ص = أ جتاس^{٢} + ب جاس^{٢} (١)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ أ س جاس^{٢} + ٢ ب س جتاس^{٢}

= ٢ س (−أ جاس^{٢} + ب جتاس^{٢}) (٢)

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٢ (− أ جاس^{٢} + ب جتاس^{٢})

+ ٢ س (− ٢ أ س جتاس^{٢} − ٢ ب س جاس^{٢})

= ٢ (− أ جاس^{٢} + ب جتاس^{٢})

− ٤ س^{٢} (أ جتاس^{٢} + ب جاس^{٢})

بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج أن :

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٤ س^{٢} ص (بالضرب × س)

س $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ − $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٤ س^{٢} ص = ٠

٥٣

∵ س ص = أ ∴ ص = أ س$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − أ س$^{-٢}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٢ أ س$^{-٣}$

، س = أ ص$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ = − أ ص$^{-٢}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{س}}{\text{ءص}^{٢}}$ = ٢ أ ص$^{-٣}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ × $\frac{\text{ء}^{٢}\text{س}}{\text{ءص}^{٢}}$ = ٢ أ س$^{-٣}$ × ٢ أ ص$^{-٣}$

= ٤ أ^{٢} س$^{-٣}$ ص$^{-٣}$

= ٤ أ^{٢} (أ$^{-٣}$) = $\frac{٤}{\text{أ}}$

، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ = ١

، ∵ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ × $\frac{\text{ء}^{٢}\text{س}}{\text{ءص}^{٢}}$ < $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

∴ $\frac{٤}{\text{أ}}$ < ١ ∴ ٤ < أ

∴ أ ∈]٠ ، ٤[

٥٤

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ أ س + ٢ ب ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ أ

∴ ٦ أ = ١٢ ∴ أ = ٢

، (٦ أ س + ٢ ب)$_{\text{س}=١}$ = ٦

∴ ٦ أ + ٢ ب = ٦ ∴ ب = −٣

٥٥

بفرض أن : د (س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + جـ

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

∴ دً (س) = ٦ س + ٢ أ

∴ س^{٣} + (أ + ٣) س^{٢} + (٢ أ + ب + ٦) س

+ ٢ أ + ب + جـ

= س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٩ س − ٢

∴ أ + ٣ = ٧ ∴ أ = ٤

٢ أ + ب + ٦ = ٩ ∴ ب = −٥

٢ أ + ب + جـ = −٢ ∴ جـ = −٥

∴ د (س) = س^{٣} + ٤ س^{٢} − ٥ س − ٥

٥٦

ص = أ س^{ن} + ب س$^{-ن+١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن أ س$^{ن-١}$ + ب (−ن + ١) س$^{-ن}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ن (ن − ١) أ س$^{ن-٢}$

+ ب (−ن + ١) (−ن) س$^{-ن-١}$

(بالضرب × س^{٢})

س^{٢} $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ن (ن − ١) أ س^{ن}

+ ب (ن − ١)(ن) س$^{-ن+١}$

= ن (ن − ١) [أ س^{ن} + ب س$^{-ن+١}$]

= ن (ن − ١) ص

٥٧

ص = أ جاس + ب جتاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = أ جتاس − ب جاس

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = − أ جاس − ب جتاس

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = − أ جتاس + ب جاس

$\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}}$ = أ جاس + ب جتاس

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$

= (أ جتاس − ب جاس) + (− أ جتاس + ب جاس)

= صفر (١)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}}$

= (− أ جاس − ب جتاس) + (أ جاس + ب جتاس)

= صفر (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}}$

٥٨

ص = د (ع) ، ع = ر (س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = دَ (ع) ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = رَ (س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$. $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = دَ (ع) . رَ (س)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = دَ (ع) . رً (س) + رَ (س) دً (ع) × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= دَ (ع) . رً (س) + رَ (س) دً (ع) × رَ (س)

= دً (ع) [رَ (س)]^{٢} + رً (س) . دَ (ع)

٦٠

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س}+١) - (\text{س}-١)}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{٢}{(\text{س}+١)^{٢}} = ٢\,(\text{س}+١)^{-٢}$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٢ \times ٢\,(\text{س}+١)^{-٣} = \frac{-٢\,\underline{|٢}}{(\text{س}+١)^{٣}}$$

$$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٢ \times ٢ \times ٣\,(\text{س}+١)^{-٤} = \frac{٢\,\underline{|٣}}{(\text{س}+١)^{٤}}$$

$$\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}} = -٢ \times ٢ \times ٣ \times ٤\,(\text{س}+١)^{-٥} = \frac{-٢\,\underline{|٤}}{(\text{س}+١)^{٥}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} = \frac{(-١)^{\text{ن}-١} \times ٢\,\underline{|\text{ن}}}{(\text{س}+١)^{\text{ن}+١}}$$

٦١

$$\text{ص} = \text{جتا}\,٢\text{س}$$

$$\text{ص}' = -٢\,\text{جا}\,٢\text{س} = ٢\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right)$$

$$\text{ص}'' = -٢^{٢}\,\text{جتا}\,٢\text{س} = ٢^{٢}\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \pi\right)$$

$$\text{ص}''' = ٢^{٣}\,\text{جا}\,٢\text{س} = ٢^{٣}\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{٣\pi}{٢}\right)$$

$$\text{ص}^{(٤)} = ٢^{٤}\,\text{جتا}\,٢\text{س} = ٢^{٤}\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + ٢\pi\right)$$

$$\therefore \text{ص}^{(\text{ن})} = ٢^{\text{ن}}\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{\text{ن}\pi}{٢}\right)$$

$$\therefore \text{ص}^{(١٥)} = ٢^{١٥}\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{١٥\pi}{٢}\right)$$

$$= ٢^{١٥}\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{٣\pi}{٢}\right) = ٢^{١٥}\,\text{جا}\,٢\text{س}$$

$$\text{ص}^{(٢٠٢٠)} = ٢^{٢٠٢٠}\,\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{٢٠٢٠\pi}{٢}\right)$$

$$= ٢^{٢٠٢٠}\,\text{جتا}\,(٢\text{س}) = ٢^{٢٠٢٠}\,\text{ص}$$

٦٢

$$\text{ص} = \text{جا}\,٢\text{س}$$

$$\text{ص}' = ٢\,\text{جتا}\,٢\text{س} = ٢\,\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right)$$

$$\text{ص}'' = -٢^{٢}\,\text{جا}\,٢\text{س} = ٢^{٢}\,\text{جا}\left(٢\text{س} + \pi\right)$$

$$\text{ص}''' = ٢^{٣}\,\text{جتا}\,٢\text{س} = ٢^{٣}\,\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٣\pi}{٢}\right)$$

$$\text{ص}^{(٤)} = ٢^{٤}\,\text{جا}\,٢\text{س} = ٢^{٤}\,\text{جا}\left(٢\text{س} + ٢\pi\right)$$

$$\therefore \text{ص}^{(\text{ن})} = ٢^{\text{ن}}\,\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\text{ن}\pi}{٢}\right)$$

$$\therefore \text{ص}^{(٢٥)} = ٢^{٢٥}\,\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٢٥\pi}{٢}\right)$$

$$= ٢^{٢٥}\,\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right) = ٢^{٢٥}\,\text{جتا}\,٢\text{س}$$

$$\text{ص}^{(٢٠١٦)} = ٢^{٢٠١٦}\,\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{٢٠١٦\pi}{٢}\right)$$

$$= ٢^{٢٠١٦}\,\text{جا}\,(٢\text{س}) = ٢^{٢٠١٦}\,\text{ص}$$

٦٣

$$\text{جا}\,\text{ص} + \text{جتا}\,٢\text{س} = ٠$$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$$\text{جتا}\,\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢\,\text{جا}\,٢\text{س} = ٠$$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$$\text{جتا}\,\text{ص}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times -\text{جا}\,\text{ص} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٤\,\text{جتا}\,٢\text{س} = ٠$$

(بالقسمة على جتا ص)

$$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} - \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢}\text{طا}\,\text{ص} = ٤\,\text{جتا}\,٢\text{س}\,\text{قا}\,\text{ص}$$

٦٤

$$\text{جا}\,٢\text{س} - \text{جتا}\,٣\text{ص} = ٠$$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$$٢\,\text{جتا}\,٢\text{س} + ٣\,\text{جا}\,٣\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$$-٤\,\text{جا}\,٢\text{س} + ٩\,\text{جتا}\,٣\text{ص}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\,(٣\,\text{جا}\,٣\text{ص}) = ٠$$

(بالقسمة على جتا ٣ص)

$$\frac{-٤\,\text{جا}\,٢\text{س}}{\text{جتا}\,٣\text{ص}} + ٩\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\,(٣\,\text{طا}\,٣\text{ص}) = ٠$$

(ولكن جا ٢س = جتا ٣ص)

$$\therefore ٣\,\text{طا}\,٣\text{ص}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٩\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} - ٤ = ٠$$

٦٥

$$\text{ص} = \text{طا}^{٢}\,\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{طا}\,\text{س}\,\text{قا}^{٢}\,\text{س}$$

$$= ٢\,\text{طا}\,\text{س}\,(١ + \text{طا}^{٢}\,\text{س})$$

$$= ٢\,\text{طا}\,\text{س} + ٢\,\text{طا}^{٣}\,\text{س}$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\,\text{قا}^{٢}\,\text{س} + ٦\,\text{طا}^{٢}\,\text{س}\,\text{قا}^{٢}\,\text{س}$$

$$= ٢\,(١ + \text{ص}) + ٦\,\text{ص}\,(١ + \text{ص})$$

$$= ٢\,(١ + \text{ص})\,(١ + ٣\,\text{ص})$$

$$\therefore \frac{١}{٢}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = (١ + \text{ص})\,(١ + ٣\,\text{ص})$$

٦٥

① (أ) ② (ب) ③ (د) ④ (أ)

⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

إرشادات لحل رقم ٦٥

① $\because \text{ص} = ١ + \frac{\text{س}}{|١} + \frac{\text{س}^{٢}}{|٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{|٣} + \dots$ إلى ∞

$\therefore \text{ص}' = \text{صفر} + \frac{١}{|١} + \frac{٢\,\text{س}}{|٢} + \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{|٣} + \dots$ إلى ∞

$= ١ + \frac{\text{س}}{|١} + \frac{\text{س}^{٢}}{|٢} + \dots$ إلى ∞

$\therefore \text{ص}' = \text{ص}$ $\therefore \text{ص}'' = \text{ص}' = \text{ص}$

$\therefore ٥\,\text{ص}'' - ٢\,\text{ص}' - ٣\,\text{ص}$

$= ٥\,\text{ص} - ٢\,\text{ص} - ٣\,\text{ص} = \text{صفر}$

② $\because \text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٢}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}$

$= \text{هـ}\,(٥\,\text{س}^{٢} + \text{هـ})$

$\therefore \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = ٥\,\text{س}^{٢} + \text{هـ}$

$\therefore \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}}\,(٥\,\text{س}^{٢} + \text{هـ})$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٢}$ $\therefore \text{د}'(\text{س}) = ١٠\,\text{س}$

$\therefore \text{د}''(\text{س}) = ١٠$ $\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}} = ١٠$

③ $\because (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}(\text{ر}(\text{س})) = [\text{ر}(\text{س})]^{٢}$

$\therefore (\text{د} \circ \text{ر})'(\text{س}) = ٢\,\text{ر}(\text{س}) \times \text{ر}'(\text{س})$

$\therefore (\text{د} \circ \text{ر})''(\text{س}) = ٢\,\text{ر}(\text{س}) \times \text{ر}''(\text{س}) + ٢\,[\text{ر}'(\text{س})]^{٢}$

$\therefore (\text{د} \circ \text{ر})''(٢) = ٢\,\text{ر}(٢) \times \text{ر}''(٢) + ٢\,[\text{ر}'(٢)]^{٢}$

$= ٢ \times ٣ \times ٥ + ٢ \times (-٢)^{٢} = ٣٨$

④ $\because \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}'(١) - \text{د}'(١ + \text{هـ})}{٢\,\text{هـ}} = ٢١$

$\therefore -\frac{١}{٢}\,\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}'(١ + \text{هـ}) - \text{د}'(١)}{\text{هـ}} = ٢١$

$\therefore -\frac{١}{٢} \times \text{د}''(١) = ٢١$

$\therefore \text{د}''(١) = -٤٢$ ، $\because \text{د}(\text{س}) = ٢\,\text{س}^{٤} - \text{أ}\,\text{س}^{٣}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٨\,\text{س}^{٣} - ٣\,\text{أ}\,\text{س}^{٢}$

، $\text{د}''(\text{س}) = ٢٤\,\text{س}^{٢} - ٦\,\text{أ}\,\text{س}$

$\therefore ٢٤ \times ١ - ٦\,\text{أ} \times ١ = -٤٢$ $\therefore \text{أ} = ١١$

⑤ $\because \sqrt{\text{ص} + \text{س}} \div \sqrt{\text{ص} - \text{س}} = \text{ك}$

$\therefore \frac{\text{ص}' + ١}{٢\sqrt{\text{ص} + \text{س}}} + \frac{\text{ص}' - ١}{٢\sqrt{\text{ص} - \text{س}}} = \text{صفر}$

بالضرب في $\left(٢\sqrt{\text{ص} + \text{س}}\,\sqrt{\text{ص} - \text{س}}\right)$

$\therefore (\text{ص}' + ١)\sqrt{\text{ص} - \text{س}}$

$+ (\text{ص}' - ١)\sqrt{\text{ص} + \text{س}} = \text{صفر}$

$\therefore \text{ص}'\left(\sqrt{\text{ص} + \text{س}} + \sqrt{\text{ص} - \text{س}}\right)$

$= \sqrt{\text{ص} + \text{س}} - \sqrt{\text{ص} - \text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\sqrt{\text{ص} + \text{س}} - \sqrt{\text{ص} - \text{س}}}{\sqrt{\text{ص} + \text{س}} + \sqrt{\text{ص} - \text{س}}}$

بالضرب في مرافق البسط

$\therefore \text{ص}' = \frac{\left(\sqrt{\text{ص} + \text{س}} - \sqrt{\text{ص} - \text{س}}\right)^{٢}}{\left(\sqrt{\text{ص} + \text{س}} + \sqrt{\text{ص} - \text{س}}\right)\left(\sqrt{\text{ص} + \text{س}} - \sqrt{\text{ص} - \text{س}}\right)}$

إجابات تمارين 4

٦

نقطة التقاطع مع محور السينات : نضع ص = ٠

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

(س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة (٤ ، ٠)

أ، س = −٢ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة (−٢ ، ٠)

، ∵ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ + ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ س + ٢}{٢ ص + ٤}$ = $\frac{-س + ١}{ص + ٢}$

∴ ميل المماس هو

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٤ ، ٠)}$ = $\frac{-٢}{٢}$ ، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-٢ ، ٠)}$ = $\frac{٢}{٢}$

٧

∵ س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} = ٥

∴ ٢ س + ٣ ص + ٣ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ س − ٣ ص}{٣ س + ٢ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ١)}$ = −١ ∴ ظا هـ = −١

∴ هـ = ١٣٥°

٨

ص^{٣} = س^{٢} ∴ ص = س$^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{-١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt{س}}$

ميل المماس عند (س = ٨) = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٨}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ ظا θ = $\frac{١}{٣}$ ∴ θ ≈ ١٨°٢٦َ

٩

∵ ٣ ص^{٢} − ٦ ص + س^{٢} = ٠

∴ ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ − ٦ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ س = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ س}{٦ ص − ٦}$ = $\frac{-س}{٣ ص − ٣}$

① نجعل $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر ∴ $\frac{-س}{٣ ص − ٣}$ = ٠

∴ س = ٠ بالتعويض فى معادلة المنحنى

∴ ٣ ص^{٢} − ٦ ص = ٠

∴ ٣ ص (ص − ٢) = ٠ ص = ٠ أ، ص = ٢

∴ النقط هى : (٠ ، ٠) أ، (٠ ، ٢)

② نجعل $\frac{ءص}{ءس}$ غير معرفة ∴ ٣ ص − ٣ = ٠

∴ ص = ١ بالتعويض فى معادلة المنحنى

٣ − ٦ + س^{٢} = ٠

س^{٢} = ٣ ⟸ س = ± $\sqrt{٣}$

النقط : ($\sqrt{٣}$ ، ١) ، (−$\sqrt{٣}$ ، ١)

③ نجعل $\frac{ءص}{ءس}$ = ظا ٤٥° = ١ ∴ $\frac{-س}{٣ ص − ٣}$ = ١

٣ ص − ٣ = − س بالتعويض من معادلة المنحنى

٣ ص^{٢} − ٦ ص + (−٣ ص + ٣)^{٢} = ٠

٣ ص^{٢} − ٦ ص + (٩ ص^{٢} − ١٨ ص + ٩) = ٠

١٢ ص^{٢} − ٢٤ ص + ٩ = ٠

٤ ص^{٢} − ٨ ص + ٣ = ٠

(٢ ص − ١) (٢ ص − ٣) = ٠

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$ النقطة ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

أ، ص = $\frac{٣}{٢}$ ومنها س = $\frac{-٣}{٢}$ النقطة ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

١٠

٢ س + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ س − ص}{س + ٢ ص}$

، ∵ المماس // محور الصادات

∴ س + ٢ ص = ٠ ∴ س = −٢ ص (١)

وبالتعويض فى معادلة المنحنى

∴ ٤ ص^{٢} − ٢ ص^{٢} + ص^{٢} = ٣

∴ ص^{٢} = ١ ∴ ص = ± ١

ومن (١) : ∴ س = ∓ ٢

∴ النقط هى : (٢ ، −١) ، (−٢ ، ١)

∴ ص$''$ = $\frac{(ص + س) − (ص − س)}{(\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص − س})^{٢}}$

= $\frac{٢ س}{ل^{٢}}$ = $\frac{٢}{ل^{٢}}$ س

∴ ص$''$ = $\frac{٢}{ل^{٢}}$

⑥ ∵ $\frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}}$ = ٢^{ن} × ص ، ص = جا ٢ س

∴ ن تقبل القسمة على ٤

⑦ ∵ ص = أ س^{ن} − ب س$^{ن+١}$ + ٥

∴ $\frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}}$ = أ |ن − ب |ن + ١ س وهى دالة

خطية ميلها سالب وتقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات

∴ يمثلها الشكل رقم (جـ)

٦٦

ص = (س + $\sqrt{١ + س^{٢}}$)^{٥} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ (س + $\sqrt{١ + س^{٢}}$)^{٤} (١ + $\frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$)

= ٥ (س + $\sqrt{١ + س^{٢}}$)^{٤} ($\frac{\sqrt{١ + س^{٢}} + س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$)

= $\frac{٥ (س + \sqrt{١ + س^{٢}})^{٥}}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ = $\frac{٥ ص}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٥ ص}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ (١)

∴ $\sqrt{١ + س^{٢}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ ص

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $\sqrt{١ + س^{٢}}$ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ $\frac{ءص}{ءس}$

ومن (١) $\sqrt{١ + س^{٢}}$ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ $\frac{ءص}{ءس}$

= ٥ × $\frac{٥ ص}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$

(بالضرب × $\sqrt{١ + س^{٢}}$)

(١ + س^{٢}) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢٥ ص = صفر

٦٧

س = جا ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

١ = جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

صفر = − جا ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + جتا ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = جا ص $\left(\frac{١}{جتا ص}\right)^{٢}$ × $\frac{١}{جتا ص}$ = $\frac{جا ص}{جتا^{٣} ص}$

(ولكن جتا^{٢} ص + جا^{٢} ص = ١)

∴ جتا^{٢} ص = ١ − س^{٢} ∴ جتا ص = $\sqrt{١ − س^{٢}}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = $\frac{جا ص}{جتا^{٣} ص}$ = $\frac{س}{(١ − س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$

٦٨

ص = $\frac{أ س + ب}{جـ س + ء}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(جـ س + ء) (أ) − (أ س + ب) (جـ)}{(جـ س + ء)^{٢}}$

= $\frac{أ ء − ب جـ}{(جـ س + ء)^{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (أ ء − ب جـ) (جـ س + ء)$^{-٢}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = −٢ جـ (أ ء − ب جـ) (جـ س + ء)$^{-٣}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٦ جـ^{٢} (أ ء − ب جـ) (جـ س + ء)$^{-٤}$

الطرف الأيمن = ٢ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ $\left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right)$

= ٢ (أ ء − ب جـ) (جـ س + ء)$^{-٢}$

× ٦ جـ^{٢} (أ ء − ب جـ) (جـ س + ء)$^{-٤}$

= ١٢ جـ^{٢} (أ ء − ب جـ)^{٢} (جـ س + ء)$^{-٦}$

الطرف الأيسر = ٣ $\left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right)^{٢}$

= ٣ (−٢ جـ (أ ء − ب جـ) (جـ س + ء)$^{-٣}$)^{٢}

= ١٢ جـ^{٢} (أ ء − ب جـ)^{٢} (جـ س + ء)$^{-٦}$

∴ الطرفان متساويان.

٦

∵ $س^٢ + ص^٢ = ٨$

∴ $٢ س + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-س}{ص}$

∵ ميل المستقيم المعطى = -١

∴ ميل العمودى عليه = ١ ∴ $\frac{-س}{ص} = ١$

∴ ص = - س

∴ $س^٢ + (-س)^٢ = ٨$ ∴ $٢ س^٢ = ٨$

∴ س = ± ٢

∴ النقط هى (٢ ، -٢) ، (-٢ ، ٢)

٧

∵ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٦$ (١)

∴ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ ، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٢}$

∴ ميل العمودى عليه = -٢

∵ $\frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} = -٢$ ∴ $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$ (٢)

بالتعويض فى (١) ∴ $\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٦$

∴ $٣\sqrt{س} = ٦$ ∴ $\sqrt{س} = ٢$

∴ س = ٤ ∴ $\sqrt{ص} = ٤$

∴ ص = ١٦ ∴ النقطة (٤ ، ١٦)

٨

∵ $ص^٢ - س^٢ = ٧$ (١)

∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} - ٢ س$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$

، ∵ متا هـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ الميل = طا هـ = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$

س = $\frac{٣}{٤}$ ص (٢)

من (٢) فى (١) $(\frac{٣}{٤} ص)^٢ - ص^٢ = ٧$

∴ $\frac{٧}{١٦} ص^٢ = ٧$ ∴ $ص^٢ = ١٦$ ∴ ص = ± ٤

∴ ص = ٤ ومنها س = ٣ ∴ النقطة (٣ ، ٤)

أ، ص = -٤ ومنها س = -٣ ∴ النقطة (-٣ ، -٤)

٩

∵ ص = ظا س ∴ $\frac{ءص}{ءس} = قا^٢ س$

① ميل المستقيم = ٢ ∴ $قا^٢ س = ٢$

∴ قا س = + $\sqrt{٢}$ ∴ متا س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

∴ متا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

∴ ص = ١ أ، متا س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنها

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∴ ص = -١

∴ النقط $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$ ، $(\frac{٣\pi}{٤} ، -١)$

② ميل المستقيم = $\frac{٤}{١}$ ∴ $قا^٢ س = ٤$

قا س = ± ٢ ∴ متا س = $\frac{١}{٢}$ ±

∴ متا س = $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ص = $\sqrt{٣}$

أ، متا س = $\frac{-١}{٢}$ ومنها س = $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ ص = - $\sqrt{٣}$

النقط $(\frac{\pi}{٣} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٢\pi}{٣} ، -\sqrt{٣})$

١٠

ص = - ظا س $\frac{ءص}{ءس} = قا^٢ س$

ميل المستقيم = $\frac{-(-٨)}{٢} = ٤$

بوضع $\frac{ءص}{ءس} = ٤$ ∴ $قا^٢ س = ٤$

∴ قا س = ± ٢ ∴ متا س = $\frac{١}{٢}$ ±

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$

نوجد قيمة ص لكل قيمة لـ س ∴ النقط هى

$(\frac{\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٥\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٧\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$

، $(\frac{١١\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$

١١

ص = جا س جتا س ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا ٢ س ، ∵ ميل المستقيم المعطى = ١

∴ ميل العمودى عليه = ١

∴ ميل المماس = -١ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١$

∴ جتا ٢ س = ١

∴ ٢ س = π ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = ٠

∴ النقطة هى $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

١٢

∵ ص = $\frac{٢ س - ١}{٣ س - ٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(٣ س - ٢)(٢) - (٢ س - ١)(٣)}{(٣ س - ٢)^٢}$

$= \frac{١}{(٣ س - ٢)^٢}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ١)} = ١$ ∴ ظا هـ = ١

∴ هـ = ١٣٥°

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٤}$

$\frac{١}{(٣ س - ٢)^٢} = \frac{١}{٤}$ ∴ $(٣ س - ٢)^٢ = ٤$

∴ ٣ س - ٢ = ± ٢

∴ ٣ س - ٢ = ٢

ومنها س = $\frac{٤}{٣}$ ، ص = $\frac{٥}{٦}$

أو ٣ س - ٢ = -٢

ومنها س = ٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$

∴ النقط $(\frac{٤}{٣} ، \frac{٥}{٦})$ ، $(٠ ، \frac{١}{٢})$

١٣

① $س^٢ - ٣ س ص + ص^٢ = ٣$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $٢ س - ٣ ص - ٣ س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س - ٣ ص}{٣ س - ٢ ص}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ١)} = \frac{-١}{١}$

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - ١}{س - ١} = \frac{-١}{١}$

أى أن ١٤ س + ٤ ص - ٦ = ٠

② $س^٢ + س ص^٢ - ٢ ص^٢ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $٣ س^٢ + س \times ٢ ص \frac{ءص}{ءس} + ص^٢$

$- ٤ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-(٣ س^٢ + ص^٢)}{٢ س ص - ٤ ص}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ٠)} = ٢$

∴ معادلة المماس هى ص - ٠ = ٢ (س - ١)

أى أن ص = ٢ س - ٢

③ ∵ $س^٢ + ٢ س ص^٢ + ص^٢ - ٢١ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $٢ س + ٢ ص^٢ + ٢ س \times ٢ ص \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $٢ س + س ص^٢ + ص \frac{ءص}{ءس} - ص^٢ + س \frac{ءص}{ءس}$

$+ ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ س - ص^٢}{٢ ص + س ص^٢}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ٠)} = \frac{-٨}{١٧}$

∴ معادلة المماس هى ص - ٠ = $\frac{-٨}{١٧}$ (س - ١)

أى أن ٨ س + ١٧ ص - ٧٦ = ٠

④ ∵ ص = ظا س + جا ٢ س

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = قا^٢ س + ٢ جتا ٢ س$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{س = \frac{\pi}{٤}} = ٢$

، عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ٢

∴ النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، ٢\right)$

∴ معادلة المماس هي (ص − ٢) = ٢ $\left(س − \frac{\pi}{٤}\right)$

أي أن : ٢ س − ص − $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ = ٠

⑤ ص = $\frac{٦ \text{ طا س}}{١ \text{ طا}^٢ \text{ س}}$ ∴ ص = ٣ طا ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ قا^٢ ٢ س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = ٢٤

، عند س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ص = ٣ $\sqrt{٣}$

∴ النقطة $\left(\frac{\pi}{٦} ، ٣\sqrt{٣}\right)$

∴ معادلة المماس هي

(ص − ٣ $\sqrt{٣}$) = ٢٤ $\left(س − \frac{\pi}{٦}\right)$

أي أن : ٢٤ س − ص − ٤ π + ٣ $\sqrt{٣}$ = ٠

⑥ ما س = منا ٣ ص (بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ منا س = −٣ ما ٣ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{منا س}}{٣ \text{ ما ٣ ص}}$ ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\left(\frac{\pi}{٦} ، ٠\right)}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص − \frac{\pi}{٦}}{س − ٠}$ = $\frac{١}{٣}$

أي أن : س + ٣ ص − $\frac{\pi}{٢}$ = ٠

⑦ د (س) = ٢ طا^٢ س (بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ دَ (س) = ٦ طا^٢ س . قا^٢ س

∴ دَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٦ × ١ × $\left(\sqrt{٢}\right)^٢$ = ١٢ = ميل المماس

، ∵ د $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٢ طا^٢ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٢

∴ النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، ٢\right)$

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص − ٢}{س − \frac{\pi}{٤}}$ = ١٢

أي أن : ١٢ س − ص − ٣ π + ٢ = ٠

١٤

① ص = س^٢ − ٢ س + ٢

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س − ٢ ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{س = ١}$ = ٠

∴ العمودي يوازي محور الصادات وتكون معادلته

س = ١

② ∵ س ص = ٦ ∴ ص = ٦ س$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٦ س$^{-٢}$ = $\frac{-٦}{س^٢}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{س = ٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ ميل العمودي = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي : $\frac{ص − ٣}{س − ٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

أي أن : ٢ س − ٣ ص + ٥ = ٠

③ ∵ س^٢ + ص^٢ + ٢ س = ٩

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٢ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{−٢ − ٢ \text{ س}}{٢ \text{ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ٢)}$ = −٣

∴ ميل المماس = −٣ ، ميل العمودي = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي : ص − ١ = $\frac{١}{٣}$ (س − ٢)

أي أن : س − ٣ ص + ١ = ٠

④ س^٣ + ص^٣ = ٦ س ص

∴ ٣ س^٢ + ٣ ص^٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ ص + ٦ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٢ \text{ ص} − \text{س}^٢}{\text{ص}^٢ − ٢ \text{ س}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٢ ، ٢)}$ = −١ ∴ ميل العمودي = ١

∴ معادلة العمودي هي : ص − ٢ = ١ (س − ٢)

أي أن : س − ص = ٠

⑤ ص = ٤ + طا س − قا^٢ س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قا^٢ س − ٢ قا س . قا س طا س

= − قا^٢ س − ٢ قا^٢ س طا س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = −٦

∴ ميل المماس = −٦ ∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٦}$

، ∵ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ٣

∴ النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، ٣\right)$

∴ معادلة العمودي هي

(ص − ٣) = $\frac{١}{٦}$ $\left(س − \frac{\pi}{٤}\right)$

أي أن : ٤ س − ٢٤ ص + π + ٧٢ = ٠

⑥ ص = س |س| ∵ س = −٢

∴ ص = س (−س) = −س^٢

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ س ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(-٢ ، -١)}$ = ٤

∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٤}$

معادلة العمودي هي : $\frac{ص + ٤}{س + ٢}$ = $\frac{-١}{٤}$

أي أن : س + ٤ ص + ١٨ = ٠

١٥

∵ ص^٢ = س − ١ ∴ ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢ \text{ ص}}$ ∴ $\frac{١}{٢ \text{ ص}}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = −١ ومنها س = ٢ ∴ النقطة (٢ ، −١)

∴ معادلة المماس هي : (ص + ١) = $\frac{١}{٢}$ (س − ٢)

أي أن : ص = $\frac{١}{٢}$ س − ١

١٦

س^٢ + ص^٢ − ٢ ك س + ١٢ = ٠

، ∵ (٤ ، −٢) تحقق المعادلة :

∴ ٤^٢ + (−٢)^٢ − ٢ ك (٤) + ١٢ = ٠

−٨ ك = −٣٢ ∴ ك = ٤

∴ معادلة المنحنى : س^٢ + ص^٢ − ٨ س + ١٢ = ٠

٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٨ = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٤ − \text{س}}{\text{ص}}$

ميل مماس المنحنى عند النقطة (٤ ، −٢) = صفر

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٢}{س − ٤}$ = صفر

ص + ٢ = ٠

١٧

ص = ما ٢ س − منا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ منا ٢ س + ما س

∵ ميل المماس = طا $\frac{٣ \pi}{٤}$ = −١

بوضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −١ ∴ ٢ منا ٢ س + ما س = −١

٢ (١ − ٢ ما^٢ س) + ما س = −١

٤ ما^٢ س − ما س − ٣ = ٠

∴ (ما س − ١) (٤ ما س + ٣) = ٠

∴ ما س = ١ أ، ما س = $\frac{-٣}{٤}$

(مرفوض لأن س ∈ [٠ ، π])

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$

، ∵ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = صفر

النقطة هي $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right)$

معادلة المماس : $\frac{ص − ٠}{س − \frac{\pi}{٢}}$ = −١

٢ س + ٢ ص − π = ٠

١٨

① س^٢ + ص^٢ = ٥٢

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

∴ ميل المماس = $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٤ ، -٦)}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٦}{س − ٤}$ = $\frac{٢}{٣}$

أي أن : ٢ س − ٣ ص − ٢٦ = ٠

، ميل العمودى : $\frac{-٣}{٢}$

معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} + ٦}{\text{س} - ٤} = \frac{-٣}{٢}$

أى أن : ٣ س + ٢ ص = ٠ .

(٢) س ص^{٢} = ١٨ ∴ ص^{٢} + ٢ س ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ .

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{ص}}{٢\text{س}}$ عند ص = ٣

∴ س = ٢

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٢ ، ٣)} = \frac{-٣}{٤}$

∴ ميل المماس = $\frac{-٣}{٤}$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

أى أن : ٣ س + ٤ ص − ١٨ = ٠ .

، ميل العمودى = $\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{٤}{٣}$

أى أن : ٤ س − ٣ ص + ١ = ٠ .

(٣) ∵ س^{٢} − ٢ س ص − ص^{٢} = ١

∴ ٢ س − ٢ (س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص) − ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ .

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}}$ ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ٠)}$ = ١

∴ ميل المماس = ١ ، ميل العمودى = −١

∴ معادلة المماس هى (ص − ٠) = ١ (س − ١)

أى أن : ص = س − ١

، معادلة العمودى هى (ص − ٠) = −١ (س − ١)

أى أن : ص = −س + ١

(٤) س^{٢} ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص + ١ = ٠ .

∴ ٢ س ص^{٢} + ٢ س^{٢} ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٢ − ٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ .

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١ - \text{س ص}^{٢}}{\text{س}^{٢}\text{ص} + ٢}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ١)}$ = −٢

∴ ميل المماس = −٢

∴ معادلة المماس هى $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ١}$ = −٢

أى أن : ٢ س + ص − ٣ = ٠ .

(٥) ص^{٢} = س^{٢} − ٥ س − ٤

٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س − ٥

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ٥}{٢\text{ص}}$ ، عند س = ١ ∴ ص = −٢

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(-٢ ، ١)} = \frac{١}{٤}$

∴ ميل المماس = $\frac{١}{٤}$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ١} = \frac{١}{٤}$

أى أن : س − ٤ ص + ٧ = ٠ .

، ميل العمودى = ٤

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ١}$ = ٤

أى أن : ٤ س − ص − ٦ = ٠ .

(٦) ص^{٢} = $\frac{٨}{(١ + \text{س})^{٢}}$ ص^{٢} = ٨ (١ + س^{٢})$^{-١}$

٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٨ (١ + س^{٢})$^{-٢}$ × ٢ س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٨\text{س}}{\text{ص}(١ + \text{س}^{٢})^{٢}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٢ ، -١)}$ = ١

ميل المماس = ١

∴ معادلة المماس هى : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} + ١}$ = ١

أى أن : س − ص + ٣ = ٠ .

، ميل العمودى = −١

∴ معادلة العمودى هى $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} + ١}$ = −١

أى أن : س + ص − ١ = ٠ .

(٧) ص = ٢ س − ظا س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ + قا^{٢} س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}}$ = ٤

أى أن : ٢ س + ص + ١ = ٠ .

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} + ١} = \frac{-١}{٢}$

أى أن : س − ٢ ص + ٣ = ٠ .

(٨) ص = ٢ جتا س − جا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ جا س − جا س جتا س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{٣}}$ = −٢ $\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = −٢ $\sqrt{٣}$ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

، عند س = $\frac{\pi}{٣}$ فإن ص = −١

∴ النقطة هى $\left(\frac{\pi}{٣} ، -١\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص} + ١}{\text{س} - \frac{\pi}{٣}}$ = −٢ $\sqrt{٣}$

أى أن : ٢ $\sqrt{٣}$ س + ص + ١ − $\sqrt{٣}$ π = ٠ .

∴ ميل المماس = ٤ ، ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

، عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص = −١

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص} - \left(-١\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$ = ٤

أى أن : ٤ س − ص − $\frac{\pi}{٤}$ − ١ = ٠ .

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} - \left(-١\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{٤}$

أى أن : ٤ س + ١٦ ص − ٩ π + ١٦ = ٠ .

(٩) ص = ٢ + ظا س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢} س ظا س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{٣}}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = ٢ $\sqrt{٣}$ ، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

، عند س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∴ ص = ١

∴ النقطة $\left(\frac{٢\pi}{٣} ، ١\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

أى أن : ٢ $\sqrt{٣}$ س − ص − $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt{٣}$ π + ١ = ٠ .

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

أى أن : ٢ $\sqrt{٣}$ س + ص − ٢ $\sqrt{٣}$ − $\frac{٢}{٣}$ π + ١ = ٠ .

(١٠) ص = ٢ − ظا^{٢} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ ظا س قا^{٢} س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}}$ = −٤ ∴ ميل المماس = ٤

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

، عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ٢

∴ النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، ٢\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$ = ٤

أى أن : ٤ س − ص − π + ٢ = ٠ .

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{٤}$

أى أن : ٤ س + ١٦ ص − π − ٣٢ = ٠ .

(١١) ص = س جتا ٢ س + جا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا ٢ س − ٢ س جا ٢ س + جتا س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٠ ، ٠)}$ = ٢ ∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس : ص = ٢ س

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى : ص = $\frac{-١}{٢}$ س

(١٢) ص = س^{٢} جا $\frac{\pi}{٢}$ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س جا $\frac{\pi}{٢}$ س + $\frac{\pi}{٢}$ س^{٢} جتا $\frac{\pi}{٢}$ س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٢ ، ٠)}$ = −٢ π

∴ ميل المماس = −٢ π

∴ معادلة المماس هى : $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٢}$ = −٢ π

أى أن : ٢ π س + ص − ٤ π = ٠ .

، ميل العمودى = $\frac{-}{\pi/٢}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٢} = \frac{-١}{\pi/٢}$

∴ معادلة العمودى س − ٢ π ص − ٢ = ٠ ،

(١٣) ص = $\sqrt{\text{جاس + جتاس}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتاس − جاس}}{٢\sqrt{\text{جاس + جتاس}}}$

، عند س = $\frac{\pi}{٢}$ فإن ص = $\sqrt{٢}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\left(\frac{\pi}{٢}\,،\,\sqrt{٢}\right)} = -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ ميل المماس = $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، معادلته ص − $\sqrt{٢}$

، ميل العمودى = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ (غير معرف)

∴ معادلته س = $\frac{\pi}{٤}$

(١٤) س جا ٢ ص = ص جتا ٢ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جا ٢ ص + ٢ س جتا ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

= $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ جتا ٢ س − ٢ ص جا ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جا ٢ ص + ٢ ص جا ٢ س}}{\text{جتا ٢ س − ٢ س جتا ٢ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\left(\frac{\pi}{٢}\,،\,\frac{\pi}{٤}\right)} = ٢$

∴ ميل المماس = ٢ ، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص} - \frac{\pi}{٢}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = ٢$

أى أن ٢ س − ص = ٠

معادلة العمودى $\frac{\text{ص} - \frac{\pi}{٢}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{٢}$

منها ٤ س + ٨ ص − ٥ π = ٠

(١٥) (جا س + جتا س) ص = جتا^{٢} س

عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = ٠

∴ النقطة تكون $\left(\frac{\pi}{٢}\,،\,٠\right)$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

(جا س + جتا س) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + (جتا س − جا س) ص

= −٢ جتا س جا س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{−٢ جتا س جا س − (جتا س − جا س) ص}}{\text{جا س + جتا س}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\left(\frac{\pi}{٢}\,،\,٠\right)} = ٠$ ∴ ميل المماس = ٠

∴ معادلة المماس هى : ص = ٠

وميل العمودى = $\frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

∴ معادلة العمودى تكون س = $\frac{\pi}{٢}$

١٦

(١) س = ن^{٢} + ٤ ن ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن + ٤

، ص = ٢ ن^{٢} ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٤ ن

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٤ ن}}{\text{٢ ن + ٤}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{ن}=١} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ميل المماس = $\frac{٢}{٣}$

، ميل العمودى = $\frac{-٣}{٢}$

، عند ن = ١ س = ٥ ، ص = ٢

∴ النقطة هى (٥ ، ٢)

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص − ٢}}{\text{س − ٥}} = \frac{٢}{٣}$

أى أن : ٢ س − ٣ ص − ٤ = ٠ ،

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص − ٢}}{\text{س − ٥}} = \frac{-٣}{٢}$

٣ س + ٢ ص − ١٩ = ٠

(٢) س = ن^{٢} + ٢ ن + ٣ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن + ٢

، ص = ٢ ن^{٣} − ٦ ن + ١ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٦ ن^{٢} − ٦

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٦ ن}^{٢} - ٦}{\text{٢ ن + ٢}} = \frac{٦\,(\text{ن − ١})\,(\text{ن + ١})}{٢\,(\text{ن + ١})}$

= ٣ (ن − ١)

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{ن}=٠}$ = −٣ ∴ ميل المماس = ٣

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٣}$

، عند ن = ٠ ∴ س = ٢ ، ص = ١

∴ النقطة هى : (٢ ، ١)

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص − ١}}{\text{س − ٢}} = -٣$

أى أن : ٣ س + ص − ٧ = ٠ ،

، معادلة العمودى $\frac{\text{ص − ١}}{\text{س − ٢}} = \frac{١}{٣}$

أى أن : س − ٣ ص = ٠ ،

(٣) س = ن^{٢} − ٦ ن ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن − ٦

، ص = $\sqrt{\text{٣ ن − ٥}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٢\sqrt{\text{٣ ن − ٥}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣ ن − ٥}}} \times \frac{\text{٢ ن − ٦}}{١} = \frac{٦\,(\text{ن − ٣})}{٢\,(\text{ن − ٣})\sqrt{\text{٣ ن − ٥}}}$

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{ن}=٦} = \frac{٣}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٣}$

∴ ميل المماس = $\frac{١}{٣}$ ، ميل العمودى = −٣

، عند ن = ٦ ∴ س = ٠ ، ص = ١٦

∴ النقطة هى : (٠ ، ١٦)

∴ ميل معادلة المماس : $\frac{\text{ص − ١٦}}{\text{س − ٠}} = \frac{١}{٣}$

∴ س − ٣ ص + ٤٨ = ٠ ،

، معادلة العمودى $\frac{\text{ص − ١٦}}{\text{س − ٠}} = \frac{-٣}{١}$

∴ ٣ س + ص − ١٦ = ٠ ،

(٤) س = ن^{٢} − ٦ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن^{٢}

، ص = $\sqrt{\text{٣ ن − ٥}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٣\sqrt{(\text{٣ ن − ٥})^{٢}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\text{ن}^{٢}\,٣\sqrt{(\text{٣ ن − ٥})^{٢}}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{ن}=٢} = \frac{١}{١٢}$ ∴ ميل المماس = $\frac{١}{١٢}$

، ميل العمودى = −١٢

عند ن = ٢ ∴ س = ٢ ، ص = ١

∴ النقطة هى : (٢ ، ١)

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص − ١}}{\text{س − ٢}} = \frac{١}{١٢}$

س − ١٢ ص + ١٠ = ٠ ،

، معادلة العمودى $\frac{\text{ص − ١}}{\text{س − ٢}} = -١٢$

١٢ س + ص − ٢٥ = ٠ ،

(٥) س = جتا θ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = −جا θ

، ص = $\sqrt{٢}$ + جا θ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = جتا θ

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا θ}}{\text{−جا θ}}$ = −ظتا θ

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{\pi}{٤}}$ = −١

∴ ميل المماس = −١ ، ميل العمودى = ١

، عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

∴ س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ص = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

∴ النقطة = $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\,،\,\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص − }\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}}{\text{س − }\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = -١$

أى أن : س + ص − ٢$\sqrt{٢}$ = ٠ ،

، معادلة العمودى $\frac{\text{ص − }\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}}{\text{س − }\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ١$

أى أن : س − ص + $\sqrt{٢}$ = ٠ ،

(٦) س = قا θ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}}$ = قا θ ظا θ

، ص = ظا θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}}$ = قا^{٢} θ

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءθ}}{\text{ءθ}} \div \text{قا}^2\theta = \text{قا}\theta$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{\pi}{3}} = 2$

∴ ميل المماس = ٢ ، ميل العمودى = $\frac{-1}{2}$

، عند $\theta = \frac{\pi}{6}$ فإن . س = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، ص = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ النقطة $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} ، \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\text{س} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} = 2$

أى أن . ٢ س − ص − $\sqrt{3}$ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\text{س} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-1}{2}$

أى أن . ٣ س + ٦ ص − ٤ $\sqrt{3}$ = ٠

⑦ س = قا θ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}} = -\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$

، ص = قا θ + ظا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}} = -\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta - \text{قا}^2\theta$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta - \text{قا}^2\theta}{-\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta} = 1 + \text{قا}\,\theta$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{\pi}{3}} = 3$

∴ ميل المماس = ٣ ، ميل العمودى = $\frac{-1}{3}$

، عند $\theta = \frac{\pi}{3}$ ∴ س = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، ص = $\sqrt{3}$

فإن النقطة تكون $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} ، \sqrt{3}\right)$

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص} - \sqrt{3}}{\text{س} - \frac{2}{3}\sqrt{3}} = 3$

أى أن ٣ س − ص − $\sqrt{3}$ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} - \sqrt{3}}{\text{س} - \frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{-1}{3}$

أى أن : ٣ س + ٩ ص − ١١ $\sqrt{3}$ = ٠

⑧ س = ٧ + ظا θ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}} = -\text{قا}^2\theta$

، ص = ما^2 θ + $\sqrt{2}$ قا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}} = 2\,\text{ما}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta + \sqrt{2}\,\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2\,\text{ما}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta + \sqrt{2}\,\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta}{-\text{قا}^2\theta}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{2}$

∴ ميل المماس = $\frac{-3}{2}$ ، ميل العمودى = $\frac{2}{3}$

عند $\theta = \frac{\pi}{4}$ ∴ س = ٨ ، ص = $\frac{5}{2}$

∴ النقطة = $\left(8 ، \frac{5}{2}\right)$

∴ معادلة المماس : $\frac{\text{ص} - \frac{5}{2}}{\text{س} - 8} = \frac{-3}{2}$

أى أن : ٣ س + ٢ ص − ٢٩ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} - \frac{5}{2}}{\text{س} - 8} = \frac{2}{3}$

أى أن : ٤ س − ٦ ص − ١٧ = ٠

⑨ س = قا^2 θ − ١

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءθ}} = 2\,\text{قا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta = 2\,\text{قا}^2\theta\,\text{ظا}\,\theta$

، ص = ظا θ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءθ}} = \text{قا}^2\theta$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^2\theta}{2\,\text{قا}^2\theta\,\text{ظا}\,\theta} = \frac{1}{2\,\text{ظا}\,\theta}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\theta = \frac{-\pi}{4}} = \frac{-1}{2}$

∴ ميل المماس = $\frac{-1}{2}$ ، ميل العمودى = ٢

عند $\theta = \frac{-\pi}{4}$ فإن : س = ١ ، ص = −١

∴ النقطة تكون (١ ، −١)

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص} + 1}{\text{س} - 1} = \frac{-1}{2}$

أى أن : س + ٢ ص + ١ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{\text{ص} + 1}{\text{س} - 1} = \frac{2}{1}$

أى أن : ٢ س − ص − ٣ = ٠

∵ ميل المماس = ظا ٤٥° = ١

، ∵ س^2 + ص^2 + ٤ س + ٦ ص + ٥ = ٠

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٤ + ٦ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س} - 2}{\text{ص} + 3}$

∴ $\frac{-\text{س} - 2}{\text{ص} + 3} = 1$ منها ص = −س − ٥

بالتعويض :

∴ س^2 + (−س − ٥)^2 + ٤ س + ٦ (−س − ٥) + ٥ = ٠

∴ ٢ س^2 + ٨ س = ٠ ∴ ٢ س (س + ٤) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض)

أ، س = −٤ ومنها ص = −١

∴ النقطة : (−٤ ، −١)

∴ معادلة المماس هى : $\frac{\text{ص} + 1}{\text{س} + 4} = 1$

∴ س − ص + ٣ = ٠

، ∵ ميل العمودى = −١

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{\text{ص} + 1}{\text{س} + 4} = -1$

∴ س + ص + ٥ = ٠

ص = س^2 + س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س + ١

لإيجاد نقط التقاطع نحل المعادلتين ص = س^2 + س

، ص − ٢ س = ٠ معًا

∴ س^2 + س = ٢ س ∴ س^2 − س = ٠

∴ س (س − ١) = ٠

س = ٠ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة : (٠ ، ٠)

أ، س = ١ ومنها ص = ٢ ∴ النقطة : (١ ، ٢)

عند (٠ ، ٠) ، ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س + ١

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(0 ، 0)} = 1$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - 0} = 1$

∴ س − ص = ٠

∴ $\overleftarrow{\text{ر}}$ = ك (١ ، ١) ، س = ك ، ص = ك

، ∵ ميل العمودى = −١ $\frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - 0} = -1$

معادلة العمودى : س + ص = ٠

∴ $\overleftarrow{\text{ر}}$ = ك (١ ، −١) ، س = ك ، ص = −ك

عند (١ ، ٢)

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(1 ، 2)} = 3$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{\text{ص} - 2}{\text{س} - 1} = 3$

معادلة المماس : ٣ س − ص − ١ = ٠

، $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢) + ك (١ ، ٣)

، س = ١ + ك ، ص = ٢ + ٣ ك

ميل العمودى = $-\frac{1}{3}$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{\text{ص} - 2}{\text{س} - 1} = \frac{-1}{3}$

∴ س + ٣ ص − ٧ = ٠

، $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢) + ك (٣ ، −١)

، س = ١ + ٣ ك ، ص = ٢ − ك

نوجد نقط تقاطع المستقيم مع المنحنى بحل المعادلتين معًا

∵ ص = $\sqrt{6 - \text{س}}$ ، ص = س

∴ س = $\sqrt{6 - \text{س}}$ وبتربيع الطرفين

∴ س^2 = ٦ − س ∴ س^2 + س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٣ (مرفوض) أ، س = ٢

وعند س = ٢ ∴ ص = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، ٢)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(٦ - س)^{\frac{-١}{٢}} \times -١ = \frac{-١}{٢\sqrt{٦ - س}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٢)} = \frac{-١}{٤}$

∴ ميل العمودى = ٤

∴ معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ٤ (س − ٢)

أى أن : ص − ٤ س + ٦ = ٠

٤٣

$\frac{ءص}{ءس} = -$ جا (س + ص) $\left(١ + \frac{ءص}{ءس}\right)$

، ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = الميل = $-\frac{١}{٢}$

∴ $-\frac{١}{٢} = -$ جا (س + ص) × $\frac{١}{٢}$

∴ جا (س + ص) = ١ (١)

∴ س + ص = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

∴ ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi\right)$ = جتا $\frac{\pi}{٢}$ = صفر (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ جا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ لأن س ∈ [٠ ، π]

∴ نقطة التماس هى : $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right)$

∴ معادلة المماس هى : ص − ٠ = $-\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$

∴ ٢ س + ٤ ص − π = ٠

٤٤

① ق (س) = د (س) × ر (س)

قَ (س) = دَ (س) × ر (س) + د (س) × رَ (س)

عند س = ٣

ق (٣) = د (٣) × ر (٣) = ٧

∴ النقطة (٣ ، ٧)

قَ (٣) = −١ × ٧ + ١ × ٦ = −١

∴ ميل المماس = −١

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - ٧}{س - ٣} = -١$

∴ س + ص − ١٠ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص - ٧}{س - ٣} = ١$

∴ س − ص + ٤ = ٠

② ق (س) = د (س) ÷ ر (س)

قَ (س) = $\frac{ر (س) دَ (س) - د (س) رَ (س)}{(ر (س))^{٢}}$

عند س = ٧

ق (٧) = $\frac{-٢}{١}$ = −٢ ∴ النقطة (٧ ، −٢)

، قَ (س) = $\frac{١ \times ٢ - (-٢) \times ٥}{(١)^{٢}}$ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٢}{س - ٧} = ١٢$

∴ ١٢ س − ص − ٨٦ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص + ٢}{س - ٧} = \frac{-١}{١٢}$

∴ س + ١٢ ص + ١٧ = ٠

③ ق (س) = د (ر (س))

∴ قَ (س) = دَ (ر (س)) . رَ (س)

، ق (٣) = د (ر (٣)) = د (٧) = −٢

∴ النقطة (٣ ، −٢)

، قَ (٣) = دَ (ر (٣)) . رَ (٣) = دَ (٧) × ٦

= ٢ × ٦ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٢}{س - ٣} = ١٢$

∴ ١٢ س − ص − ٣٨ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص + ٢}{س - ٣} = \frac{-١}{١٢}$

∴ س + ١٢ ص + ٢١ = ٠

٤٥

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (د)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (د)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (أ)	⑱ (د)	⑲ (د)	⑳ (د)
㉑ (جـ)			

٤٦

∵ ص = س^{٣} + ٣ س − ٢

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} + ٣ (كمية موجبة لجميع قيم س)

∴ ميل المماس عند أى نقطة على المنحنى كمية موجبة.

∴ المماس عند أى نقطة على المنحنى يميل بزاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات

، عند النقطة (١ ، ٢)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ ∴ ميل العمودى = $\frac{-١}{٦}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٦}$

أى أن : س + ٦ ص − ١٣ = ٠

٤٧

٢ ص = جا ٢ س ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا ٢ س

① جتا ٢ س = ٠

∴ ٢ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٤}$

أ، ٢ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∴ س = $\frac{٣\pi}{٤}$

② عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ النقطة : $\left(\frac{\pi}{٤} ، \frac{١}{٢}\right)$

معادلة المماس : ٢ ص − ١ = ٠

، معادلة العمودى : س = $\frac{\pi}{٤}$

عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∴ ص = $\frac{-١}{٢}$

∴ النقطة : $\left(\frac{٣\pi}{٤} ، \frac{-١}{٢}\right)$

معادلة المماس : ٢ ص + ١ = ٠

معادلة العمودى : س = $\frac{٣\pi}{٤}$

٤٨

ص = ٤ − س^{٢} ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٢)}$ = −٢ ∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودى : س − ٢ ص + ٥ = ٠

وبحل المعادلتين ص = ٤ − س^{٢}

، س − ٢ ص + ٥ = ٠ معًا

∴ س − ٢ (٤ − س^{٢}) + ٥ = ٠

∴ ٢ س^{٢} + س − ٣ = ٠

∴ (س − ١) (٢ س + ٣) = ٠

∴ س = ١ النقطة الأولى (١ ، ٣) أ، س = $\frac{-٣}{٢}$

∴ النقطة الثانية حـ $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{٧}{٤}\right)$

∵ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{-٣}{٢}}$ = ٣

∴ معادلة المماس عند حـ هى $\frac{ص - \frac{٧}{٤}}{س + \frac{٣}{٢}}$ = ٣

أى أن : ١٢ س − ٤ ص + ٢٥ = ٠

٤٩

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ س^{٣} − ٤ س − ١ (١)

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ٠)}$ = −١

∴ معادلة المماس هى : ص − ٠ = −١ × (س + ١)

∴ ص = −س − ١

وبحل معادلة المماس والمنحنى معًا

∴ س^{٤} − ٢ س^{٢} − س = −س − ١

∴ (س^{٢} − ١)^{٢} = ٠ ∴ س = ± ١

∴ المماس يقطع المنحنى عند نقطة ب التى إحداثيها السينى = ١ ، د (١) = −٢

∴ ب = (١ ، −٢) ، من (١) ميل المماس = −١

∴ ميل العمودى = ١

∴ معادلة العمودى عند النقطة ب هى :

ص + ٢ = س − ١

أى أن : س − ص − ٣ = ٠

٣٢

∵ ص^{٢} (٢ أ − س) = س^{٣}

٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ أ − س) − ص^{٢} = ٣ س^{٢}

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ س^{٢} + ص^{٢}}{٢ ص (٢ أ − س)}$ ، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، أ)} = ٢$

∴ متجه اتجاه المستقيم هو (١ ، ٢)

معادلة المماس : $\overline{ر}$ = (أ ، أ) + ك (١ ، ٢)

معادلة العمودى : $\overline{ر}$ = (أ ، أ) + ك (−٢ ، ١)

٣٣

أى نقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) تقع على منحنى الدالة تحقق معادلته.

∴ ص$_{١}$ = س$_{١}^{٣}$

، ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢}

∴ ميل المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، س$_{١}^{٣}$) = ٣ س$_{١}^{٢}$ (١)

، ∵ المماس يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (س$_{١}$ ، س$_{١}^{٣}$)

∴ ميل المماس = $\frac{س_{١}^{٣} - ٠}{س_{١} - ٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{س_{١}^{٣}}{س_{١} - ٤}$ = ٣ س$_{١}^{٢}$

∴ س$_{١}^{٣}$ = ٣ س$_{١}^{٣}$ − ١٢ س$_{١}^{٢}$

∴ ٢ س$_{١}^{٣}$ − ١٢ س$_{١}^{٢}$ = ٠

∴ ٢ س$_{١}^{٢}$ (س$_{١}$ − ٦) = ٠

∴ س$_{١}$ = ٠ أ، س$_{١}$ = ٦

ومنها ص$_{١}$ = صفر أ، ص$_{١}$ = ٢١٦

∴ النقط هى : (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦)

٣٤

∵ ص = س^{٢} ويفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب)

∴ ب = أ^{٢} (١)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س ، عند س = أ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ أ

∴ معادلة المماس هى : ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

∴ ص − ب = ٢ أ (س − أ)

∴ ص − أ^{٢} = ٢ أ (س − أ)

، ∵ النقطة (٣ ، ٥) تقع على المماس

∴ ٥ − أ^{٢} = ٢ أ (٣ − أ)

∴ ٥ − أ^{٢} = ٦ أ − ٢ أ^{٢} ∴ أ^{٢} − ٦ أ + ٥ = ٠

∴ (أ − ١) (أ − ٥) = ٠

∴ أ = ١ أ، أ = ٥ ومنها ب = ١ أ، ب = ٢٥

∴ معادلة المماس هى ص − ١ = ٢ (س − ١)

أى أن : ص − ٢ س + ١ = ٠

أ، ص − ٢٥ = ١٠ (س − ٥)

أى أن ص − ١٠ س + ٢٥ = ٠

٣٥

∵ س^{٢} − ص^{٢} = ١٦ ويفرض أن نقطة التماس (أ ، ب)

∴ أ^{٢} − ب^{٢} = ١٦ (١)

، ٢ س − ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ منها $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(أ ، ب)} = \frac{أ}{ب}$ ∵ ميل المماس = $\frac{ب + ٢}{أ − ٢}$

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب + ٢}{أ − ٢}$ منها أ^{٢} − ب^{٢} = ٢ (ب + أ) (٢)

من (١) ، (٢) . ب = ٨ − أ (٣)

من (٣) ، (١) : أ^{٢} − (٨ − أ)^{٢} = ١٦

أ = ٥ ومنها ب = ٣

∴ معادلة المماس : $\frac{ص + ٢}{س − ٢} = \frac{٥}{٣}$

أى أن : ٥ س − ٣ ص − ١٦ = ٠

٣٦

ص = أ س^{٢} + ب س^{٢} ، ∵ (١ ، ٦) تحقق المعادلة

∴ أ + ب = ٦ (١)

، ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

، ∵ ميل المستقيم المعطى = ١٣

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ١)}$ = ١٣

٣ أ + ٢ ب = ١٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : أ = ١ ، ب = ٥

٣٧

∵ (−١ ، ٢) تحقق معادلتى المنحنيين

∴ أ + ب = −٢ (١)

، حـ + ١ = ٢ ∴ حـ = ١

، ∵ م$_{١}$ = $\frac{ءص_{١}}{ءس}$ = ٣ أ س^{٢} + ب

، م$_{٢}$ = $\frac{ءص_{٢}}{ءس}$ = ٢ حـ س − ١

، ∵ م$_{١}$ = م$_{٢}$ عند س = −١ ∴ ٣ أ + ب = −٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ أ = −$\frac{١}{٢}$ ، ب = $\frac{-٣}{٢}$

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = −٣ (س + ١)

أى أن : ٣ س + ص + ١ = ٠

٣٨

نفرض ص = س^{٢} يقطع المستقيم الأفقى ص = أ

فى النقط (√أ ، أ) ، (−√أ ، أ)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س

∴ ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(√أ ، أ)}$ = ٢ √أ

معادلة المماس الأول (ص − أ) = ٢ √أ (س − √أ)

∴ ٢ √أ س − ص − أ = ٠ (١)

وميل المماس الثانى $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-√أ ، أ)}$ = −٢ √أ

∴ معادلة المماس الثانى : ص − أ = −٢ √أ (س + √أ)

٢ √أ س + ص + أ = ٠ (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) ٤ √أ س = ٠ ومنها س = ٠

بالتعويض ص = −أ

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ٠)}$ = ٤

∵ (−١ ، ٠) تحقق كل منهما ولهما نفس الميل

∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (−١ ، ٠)

∴ معادلة المماس المشترك $\frac{ص − ٠}{س + ١} = \frac{٤}{١}$

أى أن : ٤ س − ص + ٤ = ٠

أى أن : المماسان يتقاطعان دائمًا فى النقطة (٠ ، −أ) ∈ محور الصادات.

٣٩

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{٣}{٤}\right)$ تحقق كلًا منهما

∴ $\frac{٣}{٤} = أ\left(\frac{٣}{٤}\right)$ ∴ أ = ١

، $\frac{٣}{٤} = ب - حـ\left(\frac{٣}{٤}\right)$ ومنها ب = $\frac{٣}{٤}$ (حـ + ١)

حاصل ضرب الميلين = −١

$\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنى الأول = ٢ أ س

، $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنى الثانى = −٢ حـ س

$\cancel{٢}أ\left(\frac{\sqrt{٣}}{\cancel{٢}}\right) \times \cancel{٢}حـ\left(\frac{\sqrt{٣}}{\cancel{٢}}\right) = \cancel{١}$

٣ أ حـ = ١ ، ∵ أ = ١ ∴ حـ = $\frac{١}{٣}$ ∴ ب = ١

٤٠

د (س) = { ٢ س ، س < ٣ ؛ ب ، س > ٣ }

، ∵ الميل = طا هـ = ٦

∴ د′(٣⁻) = د′(٣⁺) = ٦ ∴ ب = ٦

، د (س) متصلة عند س = ٣

∴ د (٣⁻) = د (٣⁺) = د (٣)

∴ ٩ + أ = ٦ × ٣ ∴ أ = ٩

٤١

∵ س² + ص² = ٥ (١)

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-س}{ص}$

∵ $\frac{-س}{ص}$ = ٢ ∴ س = −٢ ص

بالتعويض فى (١) : ٤ ص² + ص² = ٥

∴ ٥ ص² = ٥ ص = ± ١

عند ص = ١ ∴ س = −٢ ∴ النقطة (−٢ ، ١)

∴ معادلة المماس : (ص − ١) = ٢ (س + ٢)

أى أن : ٢ س − ص + ٥ = ٠

، عند ص = −١ ∴ س = ٢

∴ النقطة (٢ ، −١)

(ص + ١) = ٢ (س − ٢)

أى أن : ٢ س − ص − ٥ = ٠

٤٢

∵ س ص = ٨ (١)

∴ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س}$

، ∵ ميل المستقيم المعطى هو −٢

∴ $\frac{-ص}{س}$ = −٢ ∴ ص = ٢ س (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ ٢ س² = ٨

∴ س² = ٤ ∴ س = ± ٢

ومن (٢) : ∴ ص = ± ٤

∴ النقط هى : (٢ ، ٤) ، (−٢ ، −٤)

∴ معادلة المماس الأول $\frac{ص - ٤}{س - ٢}$ = −٢

أى أن : ص + ٢ س − ٨ = ٠

، معادلة المماس الثانى $\frac{ص + ٤}{س + ٢}$ = −٢

أى أن : ص + ٢ س + ٨ = ٠

٤٣

ص = ٢ س³ + ٣ س² + ٤ س + ٥

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س² + ٦ س + ٤

∴ ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٢) = ٤

بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤

٦ س² + ٦ س + ٤ = ٤

٦ س (س + ١) = ٠

س = ٠ ومنها ص = ٥ أ، س = −١ ومنها ص = ٢

∴ النقطة الأخرى التى يكون فيها المماس له نفس الميل هى (٠ ، ٥)

معادلة المماس الآخر : $\frac{ص - ٥}{س - ٠}$ = ٤

∴ ٤ س − ص + ٥ = ٠

٤٤

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س² − ٣

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٩}$

∴ ميل المماس المطلوب = ٩

∴ ٣ س² − ٣ = ٩ ∴ س² = ٤

∴ س = ± ٢

∴ نقطتا التماس هما : (−٢ ، ٣) ، (٢ ، ٧)

∴ معادلتا المماسين هما :

$\frac{ص - ٧}{س - ٢}$ = ٩ أى أن : ص − ٩ س + ١١ = ٠

، $\frac{ص - ٣}{س + ٢}$ = ٩ أى أن : ص − ٩ س − ٢١ = ٠

٤٥

∵ ص = س + $\frac{١}{س}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − $\frac{١}{س^٢}$

، ∵ ميل المستقيم المعطى = −٣

∴ ١ − $\frac{١}{س^٢}$ = −٣ منها س² = $\frac{١}{٤}$

∴ س = ± $\frac{١}{٢}$

عند س = $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = $\frac{٥}{٢}$

∴ النقطة $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

∴ معادلة المماس : ص − $\frac{٥}{٢}$ = −٣ $\left(س - \frac{١}{٢}\right)$

أى أن : ٣ س + ص − ٤ = ٠

، عند س = $\frac{-١}{٢}$ ومنها ص = $\frac{-٥}{٢}$

معادلة المماس : ص + $\frac{٥}{٢}$ = −٣ $\left(س + \frac{١}{٢}\right)$

أى أن : ٣ س + ص + ٤ = ٠

٤٦

بوضع ص = ٠ فى معادلة المنحنى

∴ س² − س − ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −١

∴ نقطتا التقاطع مع محور السينات هما :

(٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

، ∵ معادلة المنحنى هى :

س² + ص² − س + ٢ ص − ٢ = ٠

∴ ص² + ٢ ص = ٢ + س − س²

وبإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة لـ س

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ × (٢ ص + ٢) = ١ − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - ٢ س}{٢ ص + ٢}$

∴ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ٠)

= $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٢ ، ٠)} = \frac{١ - ٢ (٢)}{٢ (٠) + ٢} = \frac{-٣}{٢}$

∴ ميل العمودى = $\frac{٢}{٣}$

وتكون معادلة العمودى عند هذه النقطة : $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ص = ٢ س − ٤

، ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٠)

= $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٠)} = \frac{٣}{٢}$

∴ ميل العمودى = $\frac{-٢}{٣}$

وتكون معادلة العمودى عند هذه النقطة : $\frac{ص - ٠}{س + ١} = \frac{-٢}{٣}$

∴ ٣ ص = −٢ س − ٢

٤٧

∵ د (س) = س² ، ر (س) = $\frac{١}{س}$

نوجد نقط التقاطع : س² = $\frac{١}{س}$ ∴ س³ = ١

∴ س = ١ ومنها ص = ١ ∴ النقطة (١ ، ١)

د′ (س) = ٢ س

∴ د′ (١) = ٢

∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ١}$ = ٢

أى أن : ٢ س − ص − ١ = ٠

٤٨

∵ معادلة المنحنى هى س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠

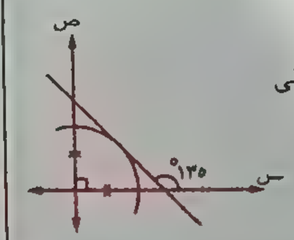
أى أن : ص^{٢} = ٥٠ − س^{٢}

، ∵ (س ، ص) ∈ $\overleftarrow{\text{و س}}$ ∪ $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ∪ الربع الأول

∴ ص = $\sqrt{٥٠ - \text{س}^{٢}}$

ولإيجاد ميل المماس للمنحنى

عند أى نقطة :



∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{٥٠ - \text{س}^{٢}}}$

، ∵ المماس للمنحنى يصنع مثلثًا متساوى الساقين

مع محورى الإحداثيات فى الربع الأول أى ميله

= ظا ١٣٥° = −١

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = −١ ∴ −١ = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{٥٠ - \text{س}^{٢}}}$

∴ س = $\sqrt{٥٠ - \text{س}^{٢}}$

∴ س^{٢} = ٥٠ − س^{٢} ∴ س^{٢} = ٢٥

∴ س = ٥ أ، −٥ (مرفوض)

، عند س = ٥ فإن ص = $\sqrt{٥٠ - ٢٥}$ = ٥

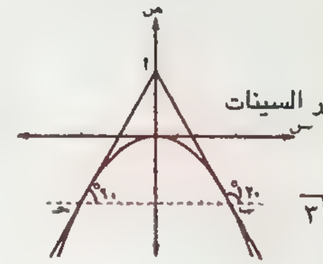
∴ المماس ميله = −١

ويمس المنحنى فى النقطة (٥ ، ٥) فتكون المعادلة

ص − ٥ = −١ (س − ٥)

∴ ص + س − ١٠ = صفر

٤٩



من تماثل المنحنى :

∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ يوازى محور السينات

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = −٢ س

−٢ س = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

س = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ومنها ص = $\frac{-٣}{٤}$

∴ النقطة حـ ($\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٤}$)

∴ معادلة المماس عند النقطة حـ هى

$\frac{\text{ص} + \frac{٣}{٤}}{\text{س} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$ أى ٤ ص − ٤ $\sqrt{٣}$ س − ٣ = ٠

ولإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ص = $\frac{٣}{٤}$ ∴ النقطة أ (٠ ، $\frac{٣}{٤}$)

٥٠

ص = س (س − ٥) أى أن : ص = س^{٢} − ٥ س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ س − ٥

المماس والعمودى يصنعان زاويتين قياسيهما ٤٥° ، ١٣٥°

مع محور السينات

∴ الميل = ٢ س − ٥ = ١

∴ س = ٣ ومنها ص = −٦ ∴ النقطة : (٣ ، −٦)

أو الميل = ٢ س − ٥ = −١

∴ س = ٢ منها ص = −٦ ∴ النقطة : (٢ ، −٦)

٥١

ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س + ١

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = س^{٢} − ٣ س + ١

∴ المماس والعمودى يصنعان زوايا ٤٥° ، ١٣٥° مع

محور السينات

∴ س^{٢} − ٣ س + ١ = ١ ∴ س^{٢} − ٣ س = ٠

∴ س (س − ٣) = ٠

∴ س = ٠ ومنها ص = ١

أ، س = ٣ ومنها ص = $\frac{-١}{٢}$

∴ النقط : (٠ ، ١) ، (٣ ، $\frac{-١}{٢}$)

أو س^{٢} − ٣ س + ١ = −١

∴ س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = ٢ ومنها ص = $\frac{-١}{٣}$

أ، س = ١ ومنها ص = $\frac{٥}{٦}$

∴ النقط : (٢ ، $\frac{-١}{٣}$) ، (١ ، $\frac{٥}{٦}$)

٥٢

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

∵ يمر بالنقطة (١ ، ٠)

∴ ٠ = أ + ب + حـ + ء (١)

∵ يمر بالنقطة (٣ ، −٤)

−٤ = ٢٧ أ + ٩ ب + ٣ حـ + ء (٢)

∵ يمر بالنقطة (٤ ، ٠)

٠ = ٦٤ أ + ١٦ ب + ٤ حـ + ء (٣)

، ∵ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ

، ميل المماس = ٠ عند س = ١

٠ = ٣ أ + ٢ ب + حـ (٤)

بحل المعادلات ينتج أنه : بطرح (١) من (٢) والقسمة على ٢

١٣ أ + ٤ ب + حـ = −٢ (٥)

بطرح (٢) من (٣) : ٣٧ أ + ٧ ب + حـ = ٤ (٦)

بطرح (٤) من (٥) والقسمة على ٢ :

٥ أ + ب = −١ (٧)

بطرح (٥) من (٦) والقسمة على ٢ :

٨ أ + ب = ٢ (٨)

بحل (٧) ، (٨) : أ = ١ ، ب = −٦ ومنها

حـ = ٩ ، ء = −٤

٥٣

بحل المعادلتين :

(س − أ)^{٢} + ص^{٢} = ١٨ ، (س + أ)^{٢} + ص^{٢} = ١٨

∴ (س − أ)^{٢} = (س + أ)^{٢}

$\cancel{\text{س}^{٢}}$ − ٢ أ س + $\cancel{\text{أ}^{٢}}$ = $\cancel{\text{س}^{٢}}$ + ٢ أ س + $\cancel{\text{أ}^{٢}}$

∴ س = ٠

ص^{٢} = ١٨ − أ^{٢} (١)

باشتقاق معادلة المنحنى الأول :

$\cancel{٢}$ (س − أ) + $\cancel{٢}$ ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{أ} - \text{س}}{\text{ص}}$

باشتقاق معادلة المنحنى الثانى

$\cancel{٢}$ (س + أ) + $\cancel{٢}$ ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{-\text{س} - \text{أ}}{\text{ص}}$

∵ المنحنيين متقاطعان على التعامد

∴ $\frac{\text{أ} - \text{س}}{\text{ص}}$ × $\frac{-\text{س} - \text{أ}}{\text{ص}}$ = −١

أ^{٢} − س^{٢} = ص^{٢} ، عند س = ٠

ص^{٢} = أ^{٢} (٢)

ومن (١) ، (٢) ١٨ − أ^{٢} = أ^{٢}

أ^{٢} = ٩ أ = ± ٣

٥٤

بحل المعادلتين .

ص = س^{٢} − ٣ س + ٥ (١)

، س^{٢} − ٣ س + ص^{٢} = ٢٥ (٢)

من (١) ∴ س^{٢} − ٣ س = ص − ٥ (٣)

وبالتعويض من (٢) في (٢) : ∴ ص − ٥ + ص² = ٢٥

∴ ص² + ص − ٣٠ = ٠

∴ (ص + ٦) (ص − ٥) = ٠

∴ ص = −٦ أ، ص = ٥

عند ص = −٦

∴ س² − ٢ س + ٥ = −٦

∴ س² − ٢ س + ١١ = ٠ ليس لها حل في ح

وعند ص = ٥

∴ س² − ٢ س + ٥ = ٥

∴ س (س − ٢) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٢

∴ النقط (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)

∴ ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٢

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٥ ، ٠)}$ = −٢

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٥}{س - ٠} = \frac{١}{٢}$

أي أن : س − ٢ ص + ١٥ = ٠

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٥ ، ٢)}$ = ٢

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٥}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$

أي أن : س − ٢ ص − ١٨ = ٠

٥٥

نفرض أن المماس عند نقطة (أ ، أ²) يقطع المنحنى مرة أخرى عند نقطة (ب ، ب²)

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س

∴ ميل المماس عند (س ، أ) = ٢ أ

، معادلة المماس عند أ هي ص − أ² = ٢ أ (س − أ)

نحل معادلة المماس مع معادلة المنحنى

وذلك بوضع ص = س² في معادلة المماس

∴ س² − أ² = ٢ أ (س − أ)

∴ (س − أ) (س² + أ س + أ²) = ٢ أ (س − أ)

∴ س = أ أ، س² + أ س + أ² = ٢ أ

∴ س² + أ س − ٢ أ² = ٠

∴ (س − أ) (س + ٢ أ) = ٠

∴ س = أ أ، س = −٢ أ

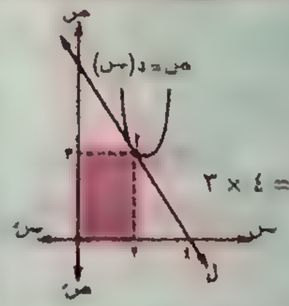
∴ نقطة التقاطع الأخرى هي (−٢ أ ، −٨ أ²)

∴ ميل المماس عند النقطة الأخرى

= ٢ (−٢ أ)² = ١٢ أ² = ٤ (٣ أ²)

= ٤ أمثال ميله عند النقطة الأولى.

٥٦



نوجد أولاً نقطة التماس

عند س = ٢

⟸ ق (٢) = ٤ × د (٢) = ٤ × ٣

= ١٢

نقطة التماس (٢ ، ١٢)

نوجد ميل المماس للمنحنى ق (س)

قَ (س) = س² × ٤ دَ (٤ س − ٦)

+ ٢ س × د (٤ س − ٦)

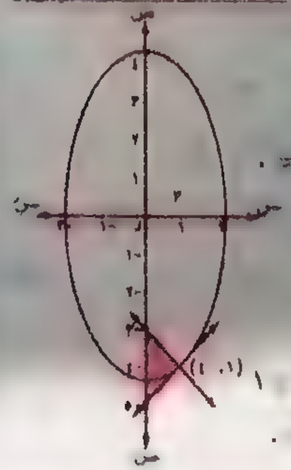
قَ (٢) = ٤ × ٤ × دَ (٢) + ٢ × ٢ × د (٢)

∴ قَ (٢) = ٤ × ٤ × $\frac{٣-}{٢}$ + ٤ × ٣ = −١٢

∴ معادلة المماس للمنحنى ق (س) عند س = ٢

$\frac{ص - ١٢}{س - ٢}$ = −١٢ ١٢ س + ص − ٣٦ = ٠

٥٧



∵ ٤ س² + ص² = ٢٠

∴ ٨ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٤ س}{ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ١)}$ = −١

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٤}{س - ١}$ = −١

أي أن : س + ص − ٥ = ٠

يقطع محور الصادات في (٠ ، −٥)

، ميل العمودي = −١

∴ معادلة العمودي $\frac{ص + ٤}{س - ١}$ = −١

س + ص + ٣ = ٠ ، يقطع محور الصادات في (٠ ، −٣)

طول القاعدة = −٣ − (−٥) = ٢ وحدة طول.

الارتفاع = ١ وحدة طول.

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ وحده مربعة.

٥٨

س² + ٤ ص² = ٢٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ س + ٨ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{٤ ص}$

النقطة أ (٢ ، ٢) تحقق معادلة المنحنى

∴ ميل المماس عند هذه النقطة = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، ٢)}$ = $\frac{١-}{٤}$

، ميل العمودي = ٤

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - ٢}{س - ٢}$ = $\frac{١-}{٤}$

أي أن : س + ٤ ص − ١٠ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١٠

∴ المماس يقطع محور السينات في النقطة ب (١٠ ، ٠)

، معادلة العمودي : $\frac{ص - ٢}{س - ٢}$ = ٤

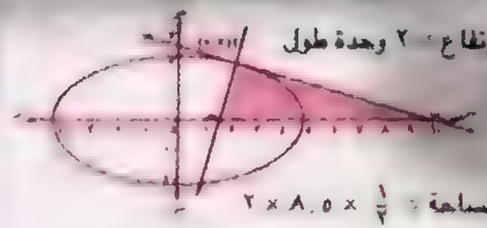
أي أن : ٤ س − ص − ٦ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١,٥

∴ العمودي يقطع محور السينات في النقطة حـ (١,٥ ، ٠)

ب حـ = ١٠ − ١,٥ = ٨,٥ وحدة طول

، الارتفاع = ٢ وحدة طول



∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٨,٥ × ٢

= ٨,٥ وحدة مربعة

٥٩

∵ ٤ ص = ٩ − س²

∴ ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٠)}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل المماس = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٠}{س - ١}$ = $\frac{١}{٢}$

أي أن : س − ٢ ص + ١ = ٠

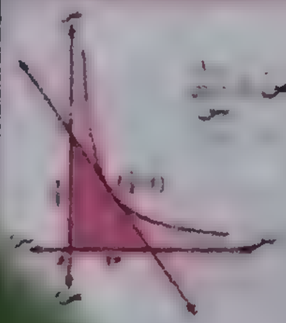
وبوضع ص = ٠ ∴ س = −١

∴ المماس يقطع محور السينات في (−١ ، ٠)

∴ العمودي يقطع محور السينات في (٥ ، ٠)

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٢ = ٦ وحدة مربعة.

٦٠



∵ ص = $\frac{١}{س}$ ∴ ص = $\frac{١-}{س^٢}$

ويفرض أن نقطة التماس

هي (أ ، $\frac{١}{أ}$)

∴ ص = $\frac{١}{أ}$

∴ معادله المماس هي ص − $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ^٢}$ (س − أ)

∴ س + أ² ص − ٢ أ = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات عند (٢ أ ، ٠)

، يقطع محور الصادات عند $(٠ ، \frac{٢}{أ})$

∴ مساحة المثلث المطلوب

$= \frac{١}{٢} \times ٢ أ \times \frac{٢}{أ} = ٢$ وحدة مربعة.

٦١

$س^٢ + ٣ س ص + ص^٢ + ١ = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢ س + ٣ ص + ٣ س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ س - ٣ ص}{٣ س + ٢ ص}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ١)} = ١$ ∴ ميل المماس = ١

∴ ميل العمودى = −١

∴ معادلة المماس : $\frac{ص - ١}{س + ١} = ١$ منها س − ص + ٢ = ٠

، معادلة العمودى : $\frac{ص - ١}{س + ١} = -١$ منها س + ص = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات فى نقطة ب (−٢ ، ٠)

، العمودى يقطع محور السينات فى نقطة حـ (٠ ، ٠)

∴ ب حـ = |−٢ − ٠| = ٢ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة مربعة.

٦٢

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ $س^٢ - ٢ س - ٢٤ = ٠$

∴ (س − ٦) (س + ٤) = ٠

∴ س = ٦ أ، س = −٤

∴ المنحنى يقطع محور السينات فى (٦ ، ٠) ، (−٤ ، ٠)

∵ $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ ص - ٢٤ = ٠$

∴ $٢ س + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} - ٢ + ٤ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س}{ص + ٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٠ ، ٦)} = \frac{-٥}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٠}{س - ٦} = \frac{-٥}{٢}$

أى أن : ٥ س + ٢ ص − ٣٠ = ٠ (١)

، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-٤ ، ٠)} = \frac{٥}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٠}{س + ٤} = \frac{٥}{٢}$

أى أن : ٥ س − ٢ ص + ٢٠ = ٠ (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ١ ، ص = ١٢,٥

∴ المماسان يتقاطعا معًا فى (١ ، ١٢,٥)

∴ المثلث المكون من محور السينات والمماسين

ارتفاعه = ١٢,٥ وحدة طول

وطول قاعدته = ٦ − (−٤) = ١٠ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ١٢,٥ \times ١٠$

= ٦٢,٥ وحدة مربعة.

٦٣

د (س) = $س^٢$ ∴ دَ (س) = ٢ س

∴ دَ (٢) = ٤ ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٤}{س - ٢} = ٤$

أى أن : ٤ س − ص − ٤ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١

∴ المماس يقطع محور السينات فى (١ ، ٠)

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة العمودى $\frac{ص - ٤}{س - ٢} = \frac{-١}{٤}$

أى أن : س + ٤ ص − ١٨ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١٨

∴ العمودى يقطع محور السينات فى (١٨ ، ٠)

∴ المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى

ارتفاعه = ٤ وحدة طول

وطول قاعدته = ١٨ − ١ = ١٧ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ١٧ = ٣٤$ وحدة مربعة.

٦٤

∵ ص = $س^٢$ − س ، ٢ ص = − $س^٣$ − ٣ س

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنيين

∴ $٢ س^٢ - ٢ س = - س^٣ - ٣ س$

∴ $س^٣ + ٢ س^٢ + س = ٠$

∴ س ($س^٢$ + ٢ س + ١) = ٠

∴ س $(س + ١)^٢$ = ٠

∴ إما س = ٠ ومنها ص = ٠

أ، س + ١ = ٠ ∴ س = −١ ومنها ص = ٢

∴ المنحنيان يتقاطعان عند النقطتين :

(٠ ، ٠) ، (−١ ، ٢)

∵ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ للمنحنى الأول = ٢ س − ١

، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ للمنحنى الثانى = $-\frac{٣}{٢} س^٢ - \frac{٣}{٢}$

∴ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٠ ، ٠)}$ للمنحنى الأول = −١

، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٠ ، ٠)}$ للمنحنى الثانى = $-\frac{٣}{٢}$

∴ ميل المماس للمنحنى الأول ≠ ميل المماس للمنحنى الثانى

∴ المنحنيان ليسا متماسين عند (٠ ، ٠)

، ∵ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٢)}$ للمنحنى الأول = −٣

، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٢)}$ للمنحنى الثانى = −٣

∴ ميل المماس للمنحنى الأول = ميل المماس للمنحنى الثانى = −٣

∴ المنحنيان يتماسان عند النقطة (−١ ، ٢) وتكون معادلة العمودى عندها

ص − ٢ = $\frac{١}{٣}$ (س + ١)

أى : س − ٣ ص + ٧ = ٠

٦٥

ص = $٣ س^٢ - ٥ س - ٢$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٦ س - ٥$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -٤)} = ١$

، ص = $س^٢ - ٣ س - ٢$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ س - ٣$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -٤)} = -١$

∵ (١ ، −٤) تحقق كل من المعادلتين

حاصل ضرب ميلهما = −١

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد.

٦٦

$(س - ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ (١)

$(س + ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) (بالطرح) :

$(س - ١)^٢ = (س + ١)^٢$ ∴ س − ١ = ± (س + ١)

∴ س = ٠ بالتعويض فى إحدى المعادلتين : ص = ± ١

∴ المنحنيان يتقاطعان فى النقطتين أ (٠ ، ١)

، ب (٠ ، −١) نوجد ميل المماس للمنحنى الأول

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

٢ (س − ١) + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$م_١ = \frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س}{ص}$

نوجد ميل المماس للمنحنى الثانى بالاشتقاق بالنسبة إلى س

٢ (س + ١) + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$م_٢ = \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س - ١}{ص}$

أولًا : عند النقطة أ (٠ ، ١)

$م_١$ = ١ ، $م_٢$ = −١

∴ $م_١ \times م_٢$ = −١

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (٠ ، ١)

معادلتا المماسين

① $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٠} = ١$ أى أن س − ص + ١ = ٠

② $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٠} = -١$ أى أن س + ص − ١ = ٠

ثانيًا عند النقطة ب (٠ ، −١)

$\text{م}_١ = -١$ ، $\text{م}_٢ = ١$ ∴ $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (٠ ، −١)

معادلتا المماسين

① $\frac{\text{ص} + ١}{\text{س} - ٠} = -١$ أى أن : س + ص + ١ = ٠

② $\frac{\text{ص} + ١}{\text{س} - ٠} = ١$ أى أن : س − ص − ١ = ٠

٦٧

∵ النقطة (أ ، ب) تحقق معادلتى المستقيم والمنحنى

∴ المستقيم يقطع المنحنى فى النقطة (أ ، ب)

، ∵ $\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = ٢$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{\text{ن}}{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}-١} + \frac{\text{ن}}{\text{ب}}\left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-١} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

عند النقطة (أ ، ب)

$\frac{\text{ن}}{\text{أ}} \times ١ + \frac{\text{ن}}{\text{ب}} \times ١ \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{ن}}{\text{أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ن}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

(ميل المماس عند (أ ، ب))

، ∵ ميل المستقيم = $-\frac{١}{\text{أ}} \div \frac{١}{\text{ب}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ المستقيم يمس المنحنى عند نقطة (أ ، ب) التى تقع على كليهما لأى قيمة لـ ن

٦٨

$\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)} = \frac{-\sqrt{\text{ص}_١}}{\sqrt{\text{س}_١}}$

معادلة المماس $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{-\sqrt{\text{ص}_١}}{\sqrt{\text{س}_١}}$

$-\sqrt{\text{ص}_١}\,\text{س} + \text{س}_١\sqrt{\text{ص}_١} = \sqrt{\text{س}_١}\,\text{ص} - \sqrt{\text{س}_١}\,\text{ص}_١$

$\sqrt{\text{ص}_١}\,\text{س} + \sqrt{\text{س}_١}\,\text{ص} = \text{س}_١\sqrt{\text{ص}_١} + \sqrt{\text{س}_١}\,\text{ص}_١$

(بالقسمة على $\sqrt{\text{س}_١}\sqrt{\text{ص}_١}$)

∴ $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}_١}} + \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{ص}_١}} = \sqrt{\text{س}_١} + \sqrt{\text{ص}_١}$

∵ $\sqrt{\text{س}_١} + \sqrt{\text{ص}_١} = \sqrt{\text{أ}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}_١}} + \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{ص}_١}} = \sqrt{\text{أ}}$

∴ الجزئين المقطوعين من محورى الإحداثيات هما

$\sqrt{\text{ص}_١}\sqrt{\text{أ}}$ ، $\sqrt{\text{س}_١}\sqrt{\text{أ}}$

مجموعهم = $\sqrt{\text{ص}_١}\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{س}_١}\sqrt{\text{أ}}$

= $\sqrt{\text{أ}}\left(\sqrt{\text{س}_١} + \sqrt{\text{ص}_١}\right)$

= $\sqrt{\text{أ}}\sqrt{\text{أ}} = \text{أ}$ = مقدار ثابت.

٦٩

معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويبعد ١ وحدة طولية فى الاتجاه الموجب لمحور السينات هى س = ١

وبحل معادلة المنحنى $\text{ص}^٢ = \text{س}^٣$ ، س = ١

∴ $\text{ص}^٢ = ١$ ∴ ص = ± ١

∴ النقطتان هما : (١ ، ١) ، (١ ، −١)

∵ $\text{ص}^٢ = \text{س}^٣$ ∴ $٢\,\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{س}^٢$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\,\text{س}^٢}{٢\,\text{ص}}$

عند (١ ، ١) ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، ١)} = \frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المماس $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ١} = \frac{٣}{٢}$

أى أن : ٣ س − ٢ ص − ١ = ٠

، ميل العمودى $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة العمودى $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ١} = \frac{-٢}{٣}$

∴ ٢ س + ٣ ص − ٥ = ٠

عند (١ ، −١) ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، -١)} = \frac{-٣}{٢}$

معادلة المماس $\frac{\text{ص} + ١}{\text{س} - ١} = \frac{-٣}{٢}$

∴ ٣ س + ٢ ص − ١ = ٠ ، ميل العمودى = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة العمودى $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ١} = \frac{٢}{٣}$

أى أن ٢ س − ٣ ص − ٥ = ٠

٧٠

① (ب) ② (أ) ③ (جـ)

④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

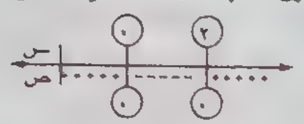
إرشادات لحل رقم ٧٠

① ∵ $\text{ص} = \text{س}^٣ - ٣\,\text{س}^٢$

∴ $\text{ص}' = ٣\,\text{س}^٢ - ٦\,\text{س} = ٣\,\text{س}(\text{س} - ٢)$

بدراسة اشارة ص′ نجد أن

ص′ تكون سالبة لكل س ∈]٠ ، ٢[



أى أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لكل س ∈]٠ ، ٢[

② ∵ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{د}(٢ - \text{س})}{\text{س} - ٢}$

∴ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢) \times \text{د}'(٢ - \text{س}) \times -١ - \text{د}(٢ - \text{س})}{(\text{س} - ٢)^٢}$

، عند س = ٥

∴ $\text{ق}'(٥) = \frac{-٣\,\text{د}'(-٣) - \text{د}(-٣)}{٩}$

، من الرسم : ∵ د (−٣) = ٣

، د′ (−٣) = ميل المماس للمنحنى = −١

∴ $\text{ق}'(٥) = \frac{-٣ \times -١ - ٣}{٩}$ = صفر

③ ∵ $\text{ص} = \frac{\text{أ}^٢}{\text{س}}$ ∴ $\text{ص}' = \frac{-\text{أ}^٢}{\text{س}^٢}$

∴ عند النقطة $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ∴ $\text{ص}' = \frac{-\text{أ}^٢}{\text{س}_١^٢}$

∴ معادلة المماس هى

$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{-\text{أ}^٢}{\text{س}_١^٢}(\text{س} - \text{س}_١)$

أى أن $\text{س}_١^٢\,\text{ص} - \text{س}_١^٢\,\text{ص}_١ = -\text{أ}^٢\,\text{س} + \text{أ}^٢\,\text{س}_١$

أى أن $\text{س}_١^٢\,\text{ص} + \text{أ}^٢\,\text{س} = \text{س}_١^٢\,\text{ص}_١ + \text{أ}^٢\,\text{س}_١$

$= \text{أ}^٢\,\text{س}_١ + \text{أ}^٢\,\text{س}_١$

$= ٢\,\text{أ}^٢\,\text{س}_١$

وبوضع س = ٠ ∴ $\text{ص} = \frac{٢\,\text{أ}^٢}{\text{س}_١}$

، وبوضع ص = ٠ ∴ س = ٢ $\text{س}_١$

∴ المماس يقطع محورى الإحداثيات

فى النقطتين $\left(٠ ، \frac{٢\,\text{أ}^٢}{\text{س}_١}\right)$ ، (٢ $\text{س}_١$ ، ٠)

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢\,\text{أ}^٢}{\text{س}_١} \times ٢\,\text{س}_١ = ٢\,\text{أ}^٢$

④ نفرض أن المماس ص = س + حـ يمس المنحنى عند النقطة (أ ، ب)

∴ ب = أ + حـ ، ص′ = ١ عند النقطة (أ ، ب)

، ∵ $٩\,\text{س}^٢ + ١٦\,\text{ص}^٢ = ١٤٤$

∴ ١٨ س + ٣٢ ص ص′ = ٠

، عند النقطة (أ ، ب) ∴ ١٨ أ + ٣٢ ب + ١ = ٠

∴ ١٨ أ + ٣٢ (أ + حـ) = ٠

∴ ٥٠ أ + ٣٢ حـ = ٠

∴ $\boxed{\text{أ} = \frac{-١٦}{٢٥}\,\text{حـ}}$ ، $\text{ب} = \frac{-١٦}{٢٥}\,\text{حـ} + \text{حـ}$

∴ $\boxed{\text{ب} = \frac{٩}{٢٥}\,\text{حـ}}$

، ∵ (أ ، ب) تحقق المعادلة $٩\,\text{س}^٢ + ١٦\,\text{ص}^٢ = ١٤٤$

∴ $٩\,\text{أ}^٢ + ١٦\,\text{ب}^٢ = ١٤٤$

∴ $\frac{\text{أ}^٢}{١٦} + \frac{\text{ب}^٢}{٩} = ١$ ∴ $\frac{١٦}{٦٢٥}\,\text{حـ}^٢ + \frac{٩}{٦٢٥}\,\text{حـ}^٢ = ١$

∴ $\frac{٢٥\,\text{حـ}^٢}{٦٢٥} = ١$ ∴ $\text{حـ}^٢ = ٢٥$ ∴ حـ = ± ٥

⑤ ∵ العمودى على المنحنى يقطع من محورى الإحداثيات أجزاء متساوية فى الطول

∴ ميل العمودى = ± ١ ، ∵ $٩\,\text{ص}^٢ = \text{س}^٣$

∴ $١٨\,\text{ص}\,\text{ص}' = ٣\,\text{س}^٢$

∴ $\text{ص}' = \frac{\text{س}^٢}{٦\,\text{ص}}$

عند النقطة (أ ، ب)

∴ ميل المماس = $\frac{أ^٢}{٦ب}$

∴ ميل العمودى = $\frac{-٦ب}{أ^٢}$

∴ $\frac{-٦ب}{أ^٢} = \pm ١$ ∴ $ب = \pm \frac{١}{٦} أ^٢$

، ∵ النقطة (أ ، ب) ∈ للمنحنى

∴ $٩ب^٢ = أ^٣$

∴ $٩ (\pm \frac{١}{٦} أ^٢)^٢ = أ^٣$

∴ $\frac{١}{٤} أ^٤ = أ^٣$

∴ $\frac{١}{٤} أ = ١$ ∴ $أ = ٤$

(٦) ∵ $٢ص^٣ = أس^٢ + س^٣$

∴ $٦ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٢أس + ٣س^٢$

، عند النقطة (أ ، أ)

∴ $٦أ^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٢أ^٢ + ٣أ^٢$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥}{٦}$

∴ معادلة المماس هى : $ص - أ = \frac{٥}{٦} (س - أ)$

وبوضع ص = ٠

∴ $-أ = \frac{٥}{٦} (س - أ)$

∴ $س = \frac{-١}{٥} أ$

وبوضع س = ٠

∴ $ص - أ = -\frac{٥}{٦} أ$ ∴ $ص = \frac{١}{٦} أ$

∴ المماس يقطع محورى الإحداثيات فى

النقطتين $(٠ ، \frac{١}{٦} أ)$ ، $(\frac{-١}{٥} أ ، ٠)$

، ∵ $ل^٢ + م^٢ = ٦١$

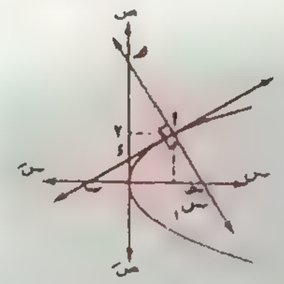
∴ $(\frac{١}{٦} أ)^٢ + (\frac{-١}{٥} أ)^٢ = ٦١$

∴ $\frac{١}{٣٦} أ^٢ + \frac{١}{٢٥} أ^٢ = ٦١$

∴ $\frac{٦١}{٩٠٠} أ^٢ = ٦١$ ∴ $أ^٢ = ٩٠٠$

∴ $أ = \pm ٣٠$

(٧)



∵ أ (س١ ، ٢)

تقع على المنحنى

$ص^٢ = ٤س$

∴ $٤ = ٤س_١$

∴ $س_١ = ١$

∴ أ (١ ، ٢)

∵ $ص^٢ = ٤س$

∴ $٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٤$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{ص}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١ ، ٢)} = ١$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٢}{س - ١} = ١$

∴ $س - ص + ١ = ٠$

∴ المماس يقطع محور السينات فى ب (−١ ، ٠) ومحور الصادات فى ء (٠ ، ١)

، معادلة العمودى $\frac{ص - ٢}{س - ١} = -١$

أى أن : $س + ص - ٣ = ٠$

∴ العمودى يقطع محور السينات فى حـ (٣ ، ٠) ومحور الصادات فى هـ (٠ ، ٣)

$ب حـ = ٣ - (-١) = ٤$ وحدة طولية.

، $ء هـ = ٣ - ١ = ٢$ وحده طولية.

$ب حـ : ء هـ = ٤ : ٢ = ٢ : ١$

مساحة الشكل الرباعى ب حـ هـ ء

= مساحة Δ أ ب حـ + مساحة Δ أ ء هـ

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ + \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ٥$ وحدة مربعة.

(٧٢)

نوجد نقط تقاطع بحل معادلتى المنحنيين معًا

$س^٢ - ٦س + ١٠ = ٤س - س^٢ - ٧$

$٢س^٢ - ١٠س + ١٧ = ٠$

المميز سالب أى لا يوجد نقط تقاطع

نفرض $(أ_١ ، ب_١)$ نقطة تماس للمنحنى الأول

$(أ_٢ ، ب_٢)$ نقطة تماس للمنحنى الثانى

ميل المماس $\frac{ب_٢ - ب_١}{أ_٢ - أ_١}$

$= \frac{(٤أ_٢ - أ_٢^٢ - ٧) - (أ_١^٢ - ٦أ_١ + ١٠)}{أ_٢ - أ_١}$ (١)

ميل المماس الأول : $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٦$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(أ_١ ، ب_١)} = ٢أ_١ - ٦$ (٢)

ميل المماس الثانى : $\frac{ءص}{ءس} = ٤ - ٢س$

$(\frac{ءص}{ءس})_{(أ_٢ ، ب_٢)} = ٤ - ٢أ_٢$ (٣)

من (٢) ، (٣) :

$٢أ_١ - ٦ = ٤ - ٢أ_٢$ ومنها $أ_١ + أ_٢ = ٥$ (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

$\frac{(٤أ_٢ - أ_٢^٢ - ٧) - (أ_١^٢ - ٦أ_١ + ١٠)}{أ_٢ - أ_١} = ٢أ_١ - ٦$

∴ $٤ (٥ - أ_١) - (٥ - أ_١)^٢ - ٧ - أ_١^٢ + ٦أ_١ - ١٠$

$= (٢أ_١ - ٦) (٥ - أ_١ - أ_١)$

∴ $٢٠ - ٤أ_١ - ٢٥ + ١٠أ_١ - أ_١^٢ - ٧ - أ_١^٢$

$+ ٦أ_١ - ١٠ = -٤أ_١^٢ + ٢٢أ_١ - ٣٠$

∴ $٢أ_١^٢ - ١٠أ_١ + ٨ = ٠$

∴ $أ_١^٢ - ٥أ_١ + ٤ = ٠$ ∴ $(أ_١ - ١) (أ_١ - ٤) = ٠$

∴ $أ_١ = ١$ ومنها $ب_١ = ٥$

∴ النقطة (١ ، ٥) ∴ ميل المماس = −٤

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - ٥}{س - ١} = -٤$

أى أن : $٤س + ص - ٩ = ٠$

أو $أ_١ = ٤$ ومنها $ب_١ = ٢$ ∴ النقطة (٤ ، ٢)

∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - ٢}{س - ٤} = \frac{٢}{١}$

$٢س - ص - ٦ = ٠$

5

(٣١)

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (جـ)

(٣٢)

∵ $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٨ص - ٦ = ٠$

∴ $٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} - ٤ \frac{ءس}{ءن} + ٨ \frac{ءص}{ءن}$

= صفر

∴ $\frac{ءس}{ءن} (٢س - ٤) + \frac{ءص}{ءن} (٢ص + ٨)$ = صفر

∵ $\frac{ءس}{ءن} = ٤$ عند (٣ ، ١)

$٤ (٢ \times ٣ - ٤) + \frac{ءص}{ءن} (٢ \times ١ + ٨)$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٤}{٥}$

(٣٣)

∵ $س^٢ + س ص + ص^٢ = ٧$

∴ $٢س \frac{ءس}{ءن} + س \frac{ءص}{ءن} + ص \frac{ءس}{ءن}$

$+ ٢ص \frac{ءص}{ءن}$ = صفر

∴ $\frac{ءس}{ءن} (٢س + ص) + \frac{ءص}{ءن} (س + ٢ص)$ = صفر

∵ $\frac{ءس}{ءن} = ١,٠$ عند (−١ ، ٣)

$١,٠ (٢ \times -١ + ٣) + \frac{ءص}{ءن} (-١ + ٢ \times ٣)$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-١}{٥٠}$

(٣٤)

∵ $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٤ص = ٢٧$ (١)

∴ $٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} + ٢ \frac{ءس}{ءن} - ٤ \frac{ءص}{ءن} = ٠$

، عندما $\frac{ءس}{ءن} = \frac{ءص}{ءن}$

∴ $٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءس}{ءن} + ٢ \frac{ءس}{ءن} - ٤ \frac{ءس}{ءن} = ٠$

وبالقسمة على $\frac{ءس}{ءن}$

∴ ٢ س + ٢ ص + ٢ − ٤ = ٠

∴ س + ص = ١ ∴ ص = ١ − س (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ س^{٢} + (١ − س)^{٢} + ٢ س − ٤ (١ − س) = ٢٧

∴ س^{٢} + ٢ س − ١٥ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٥ ومنها ص = ٦ أ، س = ٣

ومنها ص = −٢

∴ النقط هى : (−٥ ، ٦) ، (٣ ، −٢)

٥

∵ س^{٢} + ٤ س − ص = ٣

∴ ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٤ $\frac{ءس}{ءن}$ − $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

، ∵ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢ $\frac{ءس}{ءن}$

∴ ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٤ $\frac{ءس}{ءن}$ − ٢ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٠

∴ ٢ س + ٤ − ٢ = ٠

∴ س = −١ ومنها ص = −٦

∴ النقطة هى (−١ ، −٦)

٦

∵ ص = س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$

، عندما $\frac{ءص}{ءن}$ = ٣ $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ ٣ = ٢ س

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ومنها ص = ٢

∴ النقطة هى : ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢)

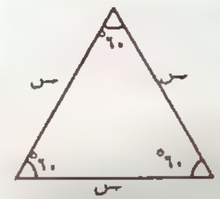
٧

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (جـ)

(٥) (د) (٦) (ب) (٧) (د) (٨) (د)

(٩) (ب) (١٠) (جـ) (١١) (أ)

٨



∵ م = $\frac{١}{٢}$ س × س × جا ٦٠°

∴ م = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س $\frac{ءس}{ءن}$

∴ $\sqrt{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × س × ٠,١ ∴ س = ٢٠ سم

٩

نفرض أن طول المستطيل = س ∴ عرضه = $\frac{١}{٢}$ س

∴ المساحة (م) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = س $\frac{ءس}{ءن}$ ٠,٢ = س × ٠,٠١

∴ س = ٢٠ ومنها المساحة = ٢٠٠ سم^{٢}

١٠

نفرض أن الطول = س ، العرض = س − ٢٠

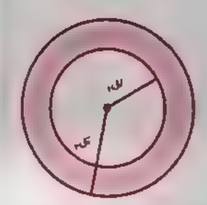
∴ المساحة (م) = س (س − ٢٠) = س^{٢} − ٢٠ س

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = (٢ س − ٢٠) $\frac{ءس}{ءن}$

، عندما العرض = ٨٠ سم ∴ س = ١٠٠

$\frac{ءم}{ءن}$ = (٢ × ١٠٠ − ٢٠) × −٠,٠٢٥ = −٤,٥ سم^{٢}/ث

١١



∵ ح = π نق$_{٢}^{٢}$ − π نق$_{١}^{٢}$

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = π × ٢ نق$_{٢}$ $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$

− π × ٢ نق$_{١}$ $\frac{ءنق_{١}}{ءن}$

= π × ٢٨ × −٠,٢ − π × ١٦ × ٠,٤

= −١٢ π سم^{٢}/ث

١٢

∵ مساحة الدائرة م = π نق^{٢}

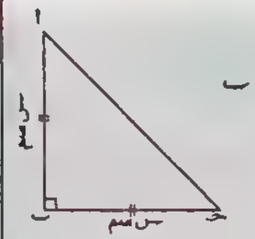
∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢ π نق × $\frac{ءنق}{ءن}$

∴ ٢٧٧,٢ = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق × ٢,١ ∴ نق = ٢١ سم

، ∵ نق = $\frac{ءنق}{ءن}$ × ن

∴ ٢١ = ٢,١ × ن ∴ ن = ١٠ ث

١٣



∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

نفرض أن :

أ ب = ب جـ = س سم

∴ المساحة (م) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = س × $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ ٣٢ = ٨ × $\frac{ءس}{ءن}$

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٤ سم/ث

، ∵ المثلث أ ب جـ متساوى الساقين وقائم الزاوية

∴ أ جـ = $\sqrt{س^{٢} + س^{٢}}$ = س $\sqrt{٢}$ سم

∴ المحيط (ح) = ٢ س + س $\sqrt{٢}$ = (٢ + $\sqrt{٢}$) س

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = (٢ + $\sqrt{٢}$) $\frac{ءس}{ءن}$

= (٢ + $\sqrt{٢}$) × ٤ = (٨ + ٤ $\sqrt{٢}$) سم/ث

١٤

نفرض أن طول الحرف ل

∴ المساحة (م) = ٦ ل^{٢} ∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ١٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$

∴ ٠,٧٢ = ١٢ × ل × ٠,٠٢ ∴ ل = ٣ سم

ح = ل^{٣}

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٣ ل^{٢} $\frac{ءل}{ءن}$

= ٣ × ٣^{٢} × ٠,٠٢ = ٠,٥٤ سم^{٣}/د

١٥

نفرض أن طول حرف المكعب ل

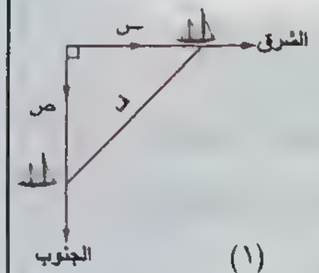
① الحجم (ح) = ل^{٣} $\frac{ءح}{ءن}$ = ٣ ل^{٢} $\frac{ءل}{ءن}$

٧٥ = ٣ ل^{٢} × ٠,٠١ ∴ ل = ٥٠ سم

② المساحة (م) = ٦ ل^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ١٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$ = ١٢ × ٥٠ × ٠,٠١ = ٦ سم^{٢}/د

١٦



∵ ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$

= ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$

+ ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ (١)

بعد ساعتين : س = ٦٠ × ٢ = ١٢٠ كم

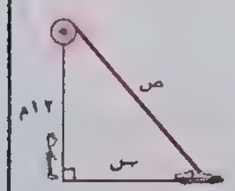
، ص = ٨٠ × ٢ = ١٦٠ كم ، ف = ٢٠٠ كم

من معادلة (١) :

٢ × ٢٠٠ × $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ × ١٢٠ × ٦٠ × ٢ + ١٦٠ × ٨٠

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ١٠٠ كم/ساعة.

١٧



$\frac{ءص}{ءن}$ = −٢ م/د

∵ س^{٢} + (١٢)^{٢} = ص^{٢}

∴ ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ (١)

عندما س = ٩ م

∴ ص = $\sqrt{٩^{٢} + ١٢^{٢}}$ = ١٥ م

ومن (١) : ٢ × ٩ × $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ × ١٥ × −٢

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{-١٠}{٣}$ م/د

أى أن السيارة تتحرك بسرعة $\frac{١٠}{٣}$ م/د نحو البرج

٢٠

$\frac{ءص}{ءن} = ٦٥$ م/ث

∵ $ف^٢ = (٥٠)^٢ + ص^٢$

∴ $٢ ف \frac{ءف}{ءن} = ٢ ص \frac{ءص}{ءن}$ (١)

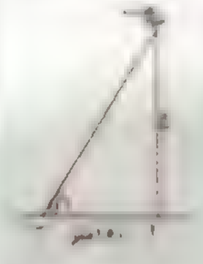
عندما ص = ١٢٠

∴ ف = $\sqrt{(١٢٠)^٢ + (٥٠)^٢}$ = ١٣٠م

ومن (١) $٢ \times ١٣٠ \times \frac{ءف}{ءن} = ٢ \times ١٢٠ \times ٦٥$

∴ $\frac{ءف}{ءن} = ٦٠$ م/ث

٢١



$\frac{ءع}{ءن} = ٤٢$ م/د

ع = ١٥٠ ظا θ

$\frac{ءع}{ءن} = ١٥٠$ قا^٢ θ $\frac{ءθ}{ءن}$

عندما ع = ١٥٠ فإن θ = $\frac{\pi}{٤}$

∴ $٤٢ = ١٥٠ \times ٢ \times \frac{ءθ}{ءن}$

∴ $\frac{ءθ}{ءن} = \frac{٧}{٥٠}$ ′/د

٢٢

$\frac{ءص}{ءن} = ١٥$ م/ث

، $\frac{ءس}{ءن} = ٢٥$ م/ث

$ف^٢ = (٩٠ + ص)^٢ + س^٢$

$٢ ف \frac{ءف}{ءن} = ٢ (٩٠ + ص) \frac{ءص}{ءن}$

$+ ٢ س \frac{ءس}{ءن}$ (١)

بعد ثانيتين

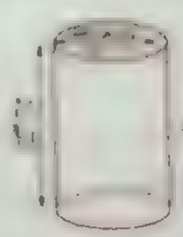
ص = ١٥ × ٢ = ٣٠ م ، س = ٢٥ × ٢ = ٥٠ م

ومن (١) ف = ١٣٠ م

$٢ \times ١٣٠ \times \frac{ءف}{ءن} = ٢ (٩٠ + ٣٠) \times ١٥ + ٢ \times ٥٠ \times ٢٥$

∴ $\frac{ءف}{ءن} = \frac{٣٠٠}{١٣}$ م/ث

٢٣



الحجم (ح) = π نق^٢ ع

∴ $\frac{ءح}{ءن} = \pi$ نق^٢ $\frac{ءع}{ءن} + \pi$ ع (٢ نق $\frac{ءنق}{ءن}$)

، ∵ ق (القطر) = ٢ نق

∴ $\frac{ءق}{ءن} = ٢ \frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{١}{٢} \frac{ءق}{ءن} = \frac{١}{٢} \times ٠,٠٠٢$

= ٠,٠٠١ سم/د

، عند ع = ٤٠ سم ، نق = ١ سم

، ∵ $\frac{ءع}{ءن} = ٠,٠٠٥$ سم/د

∴ $\frac{ءح}{ءن} = \pi \times (١)^٢ \times ٠,٠٠٥ + \pi \times ٤٠ \times$

$(٢ \times ١ \times ٠,٠٠١) = ٠,٠٨٥ \pi$ سم^٣/د

٢٤

$\frac{ءح}{ءن} = ٠,٠٢$ م^٣/د

$\frac{ءح}{ءن} = \frac{ءع}{ءن}$

$\frac{ءح}{ءن} = ٢ ع \frac{ءع}{ءن}$

$\frac{ءح}{ءن} = ٢ \times ٢٠٠ \times \frac{ءع}{ءن}$

$\frac{ءع}{ءن} = \frac{٠,٠٢}{٤٠٠}$

$\frac{ءع}{ءن} = \frac{١}{٢٠٠}$

$\frac{ءع}{ءن} = \frac{١}{٢٠٠} \times ٢٠٠$

= ١٨ متر/د

٢٥

حجم الماء الموجود بالوعاء ح = π نق^٢ ع

∴ ح = $\pi \times ١٠٠$ ع

∴ $\frac{ءح}{ءن} = \pi \times ١٠٠ \frac{ءع}{ءن}$

∴ $٣٠ \pi = ١٠٠ \pi \times \frac{ءع}{ءن}$ ∴ $\frac{ءع}{ءن} = ٠,٣$ سم/ث

أي أن معدل ارتفاع الماء في الوعاء = ٠,٣ سم/ث

، يمتلئ الوعاء بالماء عندما تصبح ع = ٦٠ سم

∴ يمتلئ الوعاء بعد مضي $\frac{٦٠}{٠,٣}$ = ٢٠٠ ثانية

حل آخر

الحجم الكلي للوعاء = $\pi \times ١٠٠ \times ٦٠$ = ٦ π سم^٣

∴ ن = $\frac{٦ \pi}{٠,٠٣ \pi}$ = ٢٠٠ ثانية

٢٦

$\frac{ءح}{ءن} = -٢$ م^٣/د

ح = π نق^٢ ع = $\pi \times (١٢)^٢ \times$ ع

$\frac{ءح}{ءن} = \pi \times ١٤٤ \times \frac{ءع}{ءن}$

$-٢ = \pi \times ١٤٤ \times \frac{ءع}{ءن}$

∴ $\frac{ءع}{ءن} = \frac{-١}{٧٢ \pi}$ م/د

٢٧

المساحة (م) = ٢ π نق^٢ + ٢ π نق ع

= ٢ π نق^٢ + ٢ π نق × (٢ نق)

= ٢ π نق^٢ + ٤ π نق^٢ = ٦ π نق^٢

∴ $\frac{ءم}{ءن} = ١٢ \pi \times$ نق $\times \frac{ءنق}{ءن}$

∴ ١٨ π = ١٢ $\pi \times ٦ \times \frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{١}{٤}$ سم/ث

٢٨

بفرض أن المسافة بين قمة السلم والأرض = ص

، المسافة بين طرفه السفلي والحائط = س

∴ $س^٢ + ص^٢ = (٢,٦)^٢$

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن

$٢ س \frac{ءس}{ءن} + ٢ ص \frac{ءص}{ءن} = ٠$

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{-س}{ص} \times \frac{ءس}{ءن}$

، ∵ $\frac{ءس}{ءن} = ٤$ متر/د

، عند س = ١

∴ ص = $\sqrt{(٢,٦)^٢ - ١^٢}$ = ٢,٤ متر

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{٢,٤} \times ٤ = \frac{٥}{٣}$ متر/د

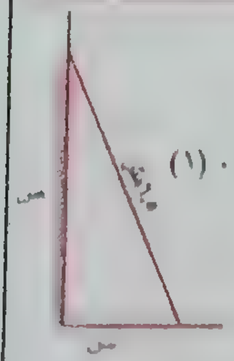
، ∵ جا θ = $\frac{ص}{٢,٦}$ ∴ ص = ٢,٦ جا θ

∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٢,٦$ جتا θ $\frac{ءθ}{ءن}$

∴ $\frac{٥}{٣} = ٢,٦ \times \frac{١}{٢,٦} \times \frac{ءθ}{ءن}$

∴ $\frac{ءθ}{ءن} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^٢$ ′/د

٢٩



∵ $س^٢ + ص^٢ = (٦,٥)^٢$

∴ $٢ س \frac{ءس}{ءن} + ٢ ص \frac{ءص}{ءن} = ٠$ (١)

، عندما $\frac{ءس}{ءن} = ٠,٣$ م/د

، س = ٢,٥ م

∴ ص = ٦ م

ومن (١) $٢ \times ٢,٥ \times ٠,٣ + ٢ \times ٦ \times \frac{ءص}{ءن} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = -\frac{١}{٨}$ م/د

∴ معدل انخفاض الطرف العلوي للسلم = $\frac{١}{٨}$ م/د

وعندما يتحرك الطرف العلوي والسفلي بنفس المعدل

أي : $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-ءس}{ءن}$

∴ $٢ س \frac{ءس}{ءن} - ٢ ص \frac{ءس}{ءن} = ٠$

∴ س = ص أي س = ص

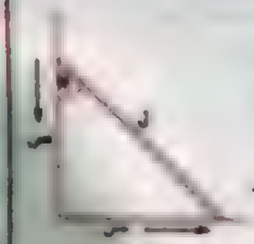
أي $ص^٢ + ص^٢ = (٦,٥)^٢$

∴ $٢ ص^٢ = (٦,٥)^٢$

∴ ص = $\frac{١٣}{٢\sqrt{٢}}$

أي بعد الطرف العلوي للسلم عن الأرض = $\frac{١٣}{٢}\sqrt{٢}$ م

٢٢



بفرض طول السلم = ل وحدة

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ل}^2$

$2\,\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 2\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

عندما $\tan\theta = -\frac{3}{4}$

$\text{س} = \text{ل}\cos\theta$ ، $\text{ص} = \text{ل}\sin\theta$

$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{-3}{4} \times -\text{ل}$

$= \frac{3\text{ل}}{4}$ وحدة/ث $(\text{ل} > 0)$

٢٣

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ل}^2$

$2\,\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 2\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

عند $\theta = \frac{\pi}{4}$

فإن س = ٢٠٠ سم ، ص = ٢٠٠ $\sqrt{2}$ سم

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-200}{200\sqrt{2}} \times 20 = \frac{-20\sqrt{2}}{2}$ سم/ث

∴ معدل هبوط الطرف العلوي للسطح = $\frac{20\sqrt{2}}{2}$ سم/ث

٢٤

(١) (أ)	(٢) (ب)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (ب)	(٧) (أ)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (أ)
(١٣) (أ)	(١٤) (ب)	(١٥) (ب)	(١٦) (ب)
(١٧) (أ)	(١٨) (ب)	(١٩) (أ)	(٢٠) (ب)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)		

٢٥

∵ الطول يتناقص بمعدل ١ سم/ث

∴ بعد ن ثانية يصبح الطول = ١٢ − ١ × ن = ١٢ − ن

∵ العرض يزداد بمعدل $\frac{1}{4}$ سم/ث

∴ بعد ثانية يصبح العرض = ٥ + $\frac{1}{4}$ ن

∴ المساحة (م) = (١٢ − ن)(٥ + $\frac{1}{4}$ ن)

وعندما يكون الشكل مربعًا

∴ ١٢ − ن = ٥ + $\frac{1}{4}$ ن ∴ ٧ = $1\frac{1}{4}$ ن

∴ ن = $\frac{28}{5}$ ث

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{1}{4}(12 - \text{ن})(5 + \frac{1}{4}\text{ن})$

∴ $6 - \frac{1}{4}\text{ن} - 5 - \frac{1}{4}\text{ن} = 0$ ∴ ن = ١ ث

وعندها م = (١٢ − ١)(٥ + $\frac{1}{4}$) = ٦٠,٥ سم²

٢٦

بفرض أن العرض = س ∴ الطول = $\frac{21}{\text{س}}$

∴ ① محيط المستطيل (ح) = ٢ (س + $\frac{21}{\text{س}}$)

= ٢ س + $\frac{42}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 2 - \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \frac{42}{\text{س}^2}$

∴ $\left(\frac{\text{دح}}{\text{دن}}\right)_{\text{س}=1} = 2 \times 1 - \frac{42}{1} = 1$

= −١٠ سم/ث

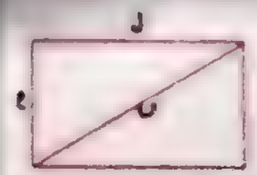
② عندما $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 0$

∴ $2 - \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \frac{42}{\text{س}^2} = 0$

∴ $2 = \frac{42}{\text{س}^2}$ ∴ $\text{س}^2 = 21$

∴ س = ٢ $\sqrt{6}$ سم وعندها ص = ٢ $\sqrt{6}$ سم

٢٧



$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = 6$ سم/ث

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -2$ سم/ث

م = ل ع = ١٢٠٠ (١)

صفر = ل $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ + ع $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

∴ ل × −٢ + ع × ٦ = ٠ ∴ ل = ٣ ع

بالتعويض في (١)

(٣ ع) × ع = ١٢٠٠ منها ٣ ع² = ١٢٠٠

ع = ٢٠ سم ∴ ل = ٦٠ سم

$\text{ن}^2 = \text{ل}^2 + \text{ع}^2$

$2\text{ن}\frac{\text{دن}}{\text{دن}} = 2\text{ل}\frac{\text{دل}}{\text{دن}} + 2\text{ع}\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\text{ن}\frac{\text{دن}}{\text{دن}} = \text{ل}\frac{\text{دل}}{\text{دن}} + \text{ع}\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\sqrt{60^2 + 20^2} \times \frac{\text{دن}}{\text{دن}} = 60 \times 6 + 20 \times -2$

$\frac{\text{دن}}{\text{دن}} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$ سم/ث

∴ القطر يزداد بمعدل $\frac{8\sqrt{10}}{5}$ سم/ث

٢٨

بفرض أن الارتفاع = ع ، طول قاعدة المثلث = ٣ ع

∴ المساحة (م) = $\frac{1}{2} \times 3\text{ع} \times \text{ع} = \frac{3}{2}\text{ع}^2$

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 3\text{ع}\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ وعندما ع = ٩ سم

∴ ٢٧,٠ = ٣ × ٩ × $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 0,01$ سم/ث

٢٩

طولا ضلعي القائمة بعد مرور ن دقيقة

هما : (١٥ + ن) سم ، (٢٠ − $\frac{1}{2}$ ن) سم

∴ مساحة المثلث م = $\frac{1}{2}$ (١٥ + ن)(٢٠ − $\frac{1}{2}$ ن)

∴ م = ١٥٠ + $\frac{20}{2}$ ن − $\frac{1}{4}$ ن²

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{20}{2} - \frac{1}{2}$ ن

∴ $\left[\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right]_{\text{ن}=5} = \frac{20}{2} - \frac{1}{2} \times 5$

= ٢,٧٥ سم²/دقيقة

، عندما $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = صفر ∴ $\frac{20}{2} - \frac{1}{2}$ ن = صفر

∴ $\frac{1}{2}$ ن = $\frac{20}{2}$ ∴ ن = ١٢,٥ دقيقة

وتكون مساحة المثلث عندها

= ١٥٠ + $\frac{20}{2}$ × ١٢,٥ − $\frac{1}{4}$ (١٢,٥)²

= ١٨٩,٠٦٢٥ سم²

٣٠

∵ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ع}^2$

∴ $2\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$= 2\text{ع}\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

، عندما س = ٨ ، ص = ١٥ ، ع = ١٧

، $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 7$ سم/دقيقة

∴ $8\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 15\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 119$ (١)

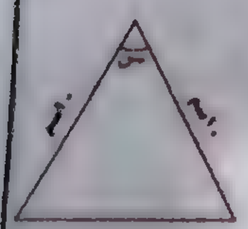
∵ س + ص + ع = ٤٠ ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}} + \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 0$

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -7$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 25$ سم/دقيقة.

، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -32$ سم/دقيقة.

٣١



$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 3°/\text{ث}$

المساحة (م)

= $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times$ جا س

= ٥٠ جا س

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 50\,\text{جتا س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

وعندما س = ٦٠° ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 3° = \frac{\pi}{180}$ راد/ث

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 50 \times \text{جتا}\,60° \times \frac{\pi}{60} = \frac{5\pi}{12}$ سم²/ث

٣٨

$\frac{ءس}{ءن} = -٣$ سم/د

$م = \frac{١}{٢} \times ٢٠\sqrt{٣} \times \sqrt{س^٢ - (١٠\sqrt{٣})^٢}$

$= ١٠\sqrt{٣}\sqrt{س^٢ - ٣٠٠}$

$\frac{ءم}{ءن} = ١٠\sqrt{٣} \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢ - ٣٠٠}} \times \frac{ءس}{ءن}$

$\frac{ءم}{ءن} = \frac{١٠\sqrt{٣}\,س}{\sqrt{س^٢ - ٣٠٠}} \times \frac{ءس}{ءن}$

$\left(\frac{ءم}{ءن}\right)_{س = ٢٠\sqrt{٣}} = \frac{١٠\sqrt{٣} \times ٢٠\sqrt{٣}}{\sqrt{(٢٠\sqrt{٣})^٢ - ٣٠٠}} \times -٣ = -٦٠$

معدل تناقص المساحة = ٦٠ سم^٢/ساعة.

٣٩

نفرض أن طولا ضلعين فى مثلث هما ل ، ع

، قياس الزاوية المحصورة بينهما هى θ

$م = \frac{١}{٢}\,ل\,ع\,جا\,\theta$

$\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢}\,ع\,جا\,\theta\,\frac{ءل}{ءن} + \frac{١}{٢}\,ل\,جا\,\theta\,\frac{ءع}{ءن}$

$+ \frac{١}{٢}\,ل\,ع\,جتا\,\theta\,\frac{ءθ}{ءن}$

، عند ل = ع = ١٠ ، $\theta = \frac{\pi}{٣}$ فإن

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢} \times ١٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٠,١$

$+ \frac{١}{٢} \times ١٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٠,١$

$+ \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ١٠ \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٢}$

$= ٥,٨٦٦$ سم^٢/ث

٤٠

$م = \frac{١}{٢}\,أ\,ب = ٢٤$ سم^٢

صفر $= \frac{١}{٢}\,أ\,\frac{ءب}{ءن} + \frac{١}{٢}\,ب\,\frac{ءأ}{ءن}$

$\frac{ءأ}{ءن} = \frac{-أ}{ب} \times \frac{ءب}{ءن}$

عند ب = ٨ سم فإن أ = ٦ سم

$\frac{ءأ}{ءن} = \frac{-٦}{٨} \times ١ = \frac{-٣}{٤}$ سم/ث

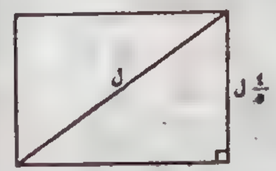
$طا\,أ = \frac{أ}{ب}$ $\therefore$ ب طا أ = أ

$\frac{ءب}{ءن}\,طا\,أ + ب\,قا^٢\,أ\,\frac{ءأ}{ءن} = \frac{ءأ}{ءن}$

$١ \times \frac{٣}{٤} + ٨ \times \left(\frac{٥}{٤}\right)^٢ \times \frac{ءأ}{ءن} = \frac{-٣}{٤}$

$\frac{ءأ}{ءن} = \frac{-٣}{٢٥}$ ء/ث = −٠,١٢ ء/ث

٤١



بفرض أن طول قطر الصفيحة ل

$\therefore$ أبعاد الصفيحة هى $\frac{٤}{٥}$ل ، $\frac{٣}{٥}$ل

$\therefore$ المساحة (م) = $\frac{٤}{٥}$ل × $\frac{٣}{٥}$ل = $\frac{١٢}{٢٥}$ ل^٢

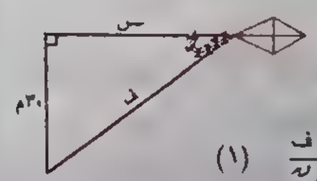
$\frac{ءم}{ءن} = \frac{٢٤}{٢٥}$ل × $\frac{ءل}{ءن}$

$٦٠ = \frac{٢٤}{٢٥} \times ل \times ٢,٥$

$\therefore$ ل = ٢٥

$\therefore$ المساحة (م) = ٣٠٠ سم^٢

٤٢



$\frac{ءس}{ءن} = ٢٥$ م/د

$س^٢ + (٣٠)^٢ = ف^٢$

$٢\,س\,\frac{ءس}{ءن} = ٢\,ف\,\frac{ءف}{ءن}$ (١)

وعندما ف = ٥٠ م

فإن . س = ٤٠ م

ومن (١) . $\cancel{٢} \times ٤٠ \times ٢٥ = \cancel{٢} \times ٥٠ \times \frac{ءف}{ءن}$

$\therefore \frac{ءف}{ءن} = ٢٠$ م/د

٤٣

بفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات

س ، س + ٢ ، ٣ س

$\therefore$ الحجم (ح) = س (س + ٢) (٣ س)

= ٣ س^٢ + ٦ س^٢

$\frac{ءح}{ءن} = (٩\,س^٢ + ١٢\,س)\,\frac{ءس}{ءن}$

$٠,٦ = (٩\,س^٢ + ١٢\,س) \times ٠,٠١$

$٩\,س^٢ + ١٢\,س - ٦٠ = ٠$

$\therefore ٣\,س^٢ + ٤\,س - ٢٠ = ٠$

$\therefore$ (س − ٢) (٣ س + ١٠) = ٠

س = ٢ أ، س = $-\frac{١٠}{٣}$ (مرفوض)

$\therefore$ أبعاد القطعة هى ٢ سم ، ٤ سم ، ٦ سم

٤٤

بفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات هى (س ، س ، ع)

$\therefore \frac{ءس}{ءن} = ١$ سم/د ، $\frac{ءع}{ءن} = -٢$ سم/د

الحجم (ح) = س^٢ ع

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = س^٢\,\frac{ءع}{ءن} + ٢\,س\,\frac{ءس}{ءن} \times ع$

$= (٦)^٢ \times -٣ + ٢ \times ٦ \times ١ \times ٢٤ = ٢١٦$ سم^٣/د

، بفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات عند أى لحظة زمنية هى :

(٦ + ن) ، (٦ + ن) ، (٢٤ − ٢ ن)

$\therefore$ الحجم (ح) = (٦ + ن)^٢ (٢٤ − ٢ ن)

$\frac{ءح}{ءن} = ٢\,(٦ + ن)\,(٢٤ - ٢ن) + (٦ + ن)^٢\,(-٢)$

= ٢ (٦ + ن) (٢٤ − ٢ ن − ٦ − ن)

= ٢ (٦ + ن) (١٨ − ٣ ن)

وعندما $\frac{ءح}{ءن}$ = صفر

$\therefore$ ١٨ − ٣ ن = ٠ $\therefore$ ن = ٦ دقيقة.

٤٥

بفرض أن طول ضلع القاعدة = ارتفاع الهرم = س

$\therefore$ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ س^٣ سم^٣

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = س^٢\,\frac{ءس}{ءن}$

$\therefore ١ = س^٢ \times ٠,٠١$

س^٢ = ١٠٠ $\therefore$ س = ١٠ سم

$\therefore$ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

٤٦

نفرض أبعاد المنشور هى س ، س ، ص

$\therefore$ الحجم (ح) = س^٢ × ص

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = س^٢\,\frac{ءص}{ءن} + ٢\,ص\,س\,\frac{ءس}{ءن}$

$= (٤)^٢ \times -٤ + ٢ \times ٨ \times ٤ \times ٢ = ٦٤$ سم^٣/ث

، بفرض أن أبعاد المنشور عند أى لحظة هى :

(٤ + ٢ ن) ، (٤ + ٢ ن) ، (٨ − ٤ ن)

$\therefore$ الحجم (ح) = (٤ + ٢ ن)^٢ (٨ − ٤ ن)

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = ٤\,(٤ + ٢ن)\,(٨ - ٤ن) + (٤ + ٢ن)^٢\,(-٤)$

= ٤ (٤ + ٢ ن) (٨ − ٤ ن − ٤ − ٢ ن)

= ٤ (٤ + ٢ ن) (٤ − ٦ ن)

عندما $\frac{ءح}{ءن}$ = صفر $\therefore$ ن = $\frac{٢}{٣}$ ث

٤٧

مساحة الدائرة (م) = π نق^٢

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = ٢\,\pi\,نق\,\frac{ءنق}{ءن}$

$\because \frac{ءم}{ءن}$ = ثابت وليكن ث

$\therefore \frac{ءنق}{ءن} = \frac{ث}{٢\,\pi\,نق}$ (١)

، $\because$ محيط الدائرة (ح) = ٢ π نق

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = ٢\,\pi\,\frac{ءنق}{ءن}$ ومن (١)

$= ٢\,\pi \times \frac{ث}{٢\,\pi\,نق} = \frac{ث}{نق}$

$\therefore \frac{ءح}{ءن} \propto \frac{١}{نق}$

أى أن محيط الدائرة يتناسب عكسيًا مع نق

٤٨

حجم الكرة (ح) = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$

س = ٤ π نق^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$ ∴ $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{س}{٤ \pi نق^{٢}}$

مساحة الكرة (م) = ٤ π نق^{٢}

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق $\frac{ءنق}{ءن}$

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق × $\frac{س}{٤ \pi نق^{٢}}$

= $\frac{٢ س}{نق}$ سم^{٢}/ث

٤٩

∵ ميل المنحنى (م) = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ − ٦ س^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = −١٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ (١)

، ∵ ص = ٤ س − ٢ س^{٣}

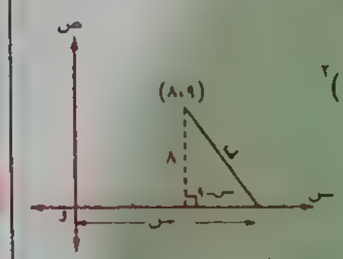
∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = (٤ − ٦ س^{٢}) $\frac{ءس}{ءن}$

∴ −٥ = (٤ − ٦ × ٤) $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٤}$

ومن (١)

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = −١٢ × ٢ × $\frac{١}{٤}$ = −٦ وحدات/ث

٥٠



ف^{٢} = ٦٤ + (س − ٩)^{٢}

٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$

= ٢ (س − ٩) $\frac{ءس}{ءن}$

بعد ٣ ث س = ٣ × ٥ = ١٥

∴ ف = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ١٠

٢ × ١٠ × $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ (١٥ − ٩) × ٥

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٣ سم/ث

٥١

بفرض أن النقطة هى (س ، ص)

ف = $\sqrt{(س − س_{١})^{٢} + (ص − ص_{١})^{٢}}$

ف = $\sqrt{(س − ١)^{٢} + (ص)^{٢}}$

ف = $\sqrt{س^{٢} + ١ − ٢ س + س^{٢} + ٥}$

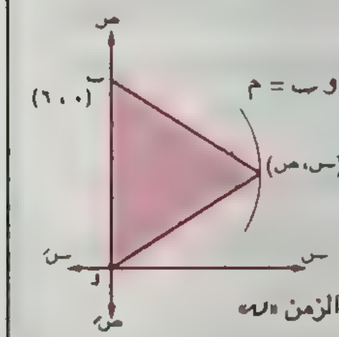
ف^{٢} = ٢ س^{٢} − ٢ س + ٦

٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = (٤ س − ٢) $\frac{ءس}{ءن}$

عند س = ٢ ∴ ف = $\sqrt{١٠}$

٢ $\sqrt{١٠}$ × $\frac{ءف}{ءن}$ = ٦ × ٣ $\sqrt{١٠}$ ∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٩ سم/ث

٥٢



بفرض أن مساحة Δ أ و ب = م

م = $\frac{١}{٢}$ و ب × س

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × س

= ٣ س

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن «ن»

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٣ $\frac{ءس}{ءن}$ (١)

ص = س^{٢} + س

$\frac{ءص}{ءن}$ = (٢ س^{٢} + ١) $\frac{ءس}{ءن}$

∴ ٢ = ٢٨ $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{١٤}$

بالتعويض فى (١) :

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٣ × $\frac{١}{١٤}$ = $\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة/ث

٥٣

مساحة شكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه س

م = $\frac{٦}{٤}$ س^{٢} طا $\frac{١٨٠}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٣}$ س^{٢}

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ س $\frac{ءس}{ءن}$

$\left(\frac{ءم}{ءن}\right)_{س = ١٠}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ × ١٠ × −٠,١

= −٣ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}/ث

٥٤

مساحة المثمن (م) = $\frac{٨}{٤}$ س^{٢} طا $\frac{١٨٠}{٨}$

م = ٢ س^{٢} طا $\frac{٤٥}{٢}$

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٤ س طا $\frac{٤٥}{٢}$ $\frac{ءس}{ءن}$

$\left(\frac{ءم}{ءن}\right)_{س = ١٠}$ = ٤ × ١٠ × طا $\frac{٤٥}{٢}$ × ٠,٢

= ١٩,٣ سم^{٢}/ث

٥٥

نفرض أن : ء هـ يمثل الرجل

، بعد الرجل عن قاعدة المصباح = س

، طول ظل الرجل = ص

، المسافة التى تحركتها

نهاية ظل الرجل = ع

① من تشابه المثلثين أ ب حـ ، ء هـ حـ

$\frac{ص}{س + ص} = \frac{١٧٠}{١٨٠} = \frac{١}{٤}$

∴ س + ص = ٤ ص ∴ س = ٣ ص

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ $\frac{ءص}{ءن}$ ∴ −٢ = ٣ $\frac{ءص}{ءن}$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٢}{٣}$ م/ث

② ∵ ع = س + ص

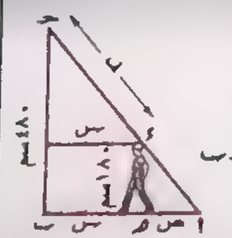
∴ $\frac{ءع}{ءن} = \frac{ءس}{ءن} + \frac{ءص}{ءن}$ = −٢ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{-٨}{٣}$ م/ث

٥٦

نفرض أن بعد الرجل عن قاعدة المصباح = س

وطول ظل الرجل = ص

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = −١٥٠ سم/ث



① من تشابه المثلثين أ ء هـ ، أ حـ ب

$\frac{ص}{س + ص} = \frac{١٨٠}{٤٨٠} = \frac{٣}{٨}$

∴ ٥ ص = ٣ س ∴ ص = $\frac{٣}{٥}$ س

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{٣}{٥}$ $\frac{ءس}{ءن}$ = −١٥٠ × $\frac{٣}{٥}$ = −٩٠ سم/ث

② ∵ ف^{٢} = س^{٢} + (٣٠٠)^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$

وعند س = ٣٠٠

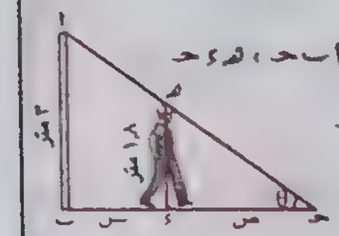
∴ ف^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (٣٠٠)^{٢}

∴ ف = ٣٠٠ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ٣٠٠ $\sqrt{٢}$ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٣٠٠ × −١٥٠

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = −٧٥ $\sqrt{٢}$ سم/ث

٥٧



من التشابه فى المثلثين أ ب حـ ، ء هـ حـ

$\frac{ص}{ص + س} = \frac{١,٨}{٣} = \frac{٣}{٥}$

∴ ٣ س = ٢ ص

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن

٣ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ $\frac{ءص}{ءن}$

$\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{٣}{٢}$ × ١,٢ = ١,٨ متر/ث

(معدل تغير طول ظل الرجل)

من Δ أ ب حـ

طا θ = $\frac{٢}{س + ص}$ = $\frac{٢}{س + \frac{٣}{٢} س}$ = $\frac{٦}{٥ س}$

∴ س = $\frac{٦}{٥}$ طا θ (بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن)

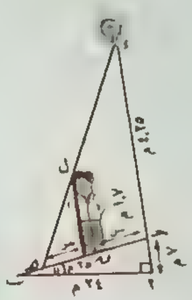
$\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{٦}{٥}$ (− قا^{٢} θ) $\frac{ءθ}{ءن}$

عند س = ٣,٦ فإن θ = طا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٣}\right)$

∴ ١,٢ = $\frac{٦}{٥}$ × −$\left(\frac{\sqrt{١٠}}{١}\right)^{٢}$ × $\frac{ءθ}{ءن}$

$\frac{ءθ}{ءن}$ = $\left(-\frac{١}{١٠}\right)^{ء}$ / ث

٥٨



أولاً : في Δ أ ب جـ

∵ ظا θ = $\frac{٧}{٢٤}$

∴ أ جـ = ٧ ك

، أ ب = ٢٤ ك

∵ جـ ب = ٢٥ متر

∴ (٧ ك)^{٢} + (٢٤ ك)^{٢} = (٢٥)^{٢}

∴ ك = ١ ∴ أ جـ = ٧ متر ، أ ب = ٢٤ متر

∴ جـ د = ١١$\frac{١}{٤}$ − ٧ = ٤$\frac{١}{٤}$ متر

، ∵ Δ هـ جـ د ~ Δ هـ ب أ

∴ $\frac{١,٧}{٤,٢٥}$ = $\frac{ص}{س + ص}$

∴ $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{ص}{س + ص}$

∴ ٢ س = ٣ ص

∴ ٢ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ $\frac{ءص}{ءن}$

∴ ٢ (−٦) = ٣ ($\frac{ءص}{ءن}$)

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = −٤ م/دقيقة

∴ معدل انكماش طول ظل الرجل = ٤ م/دقيقة

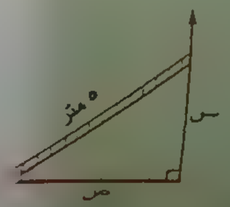
ثانيًا : ف = س + ص

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = $\frac{ءس}{ءن}$ + $\frac{ءص}{ءن}$

= −٦ − ٤ = −١٠ م/دقيقة

∴ نهاية ظل الرجل تقترب بمعدل ١٠ م / دقيقة من أعلى نقطة للمنحدر.

٥٩



$\frac{ءس}{ءن}$ = ١ متر/د

ص طول مسقط القضيب على الأرض

س^{٢} − ص^{٢} = ٢٥

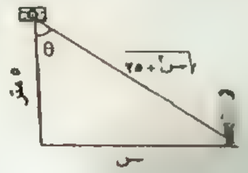
٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

$\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{−س}{ص}$ $\frac{ءس}{ءن}$

عندما س = ٣ متر ∴ ص = ٤

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{−٣}{٤}$ × ١ = $\frac{−٣}{٤}$ متر/د

٦٠



$\frac{ءس}{ءن}$ = −١٠ م/ث

ظا θ = $\frac{س}{٥}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن)

قا^{٢} θ $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٥}$ $\frac{ءس}{ءن}$

$\frac{س^{٢} + ٢٥}{٢٥}$ × $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٥}$ × −١٠

$\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{−٥٠}{س^{٢} + ٢٥}$

∴ ($\frac{ءθ}{ءن}$)$_{س = ٥}$ = (−١)^{٤} /ث

٦١

نفرض أن سمك طبقة الجليد عند أى لحظة = س سم

∴ حجم الجليد (ح) = $\frac{٤}{٣}$ π (٦ + س)^{٣} − $\frac{٤}{٣}$ π (٦)^{٣}

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π (٦ + س)^{٢} × $\frac{ءس}{ءن}$

∴ −٢٠ = ٤ π (٦ + س)^{٢} × $\frac{−١}{٢٠ π}$

∴ س = ٤

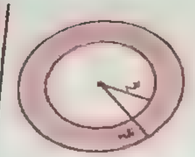
، ∵ مساحة السطح الخارجى (م) = ٤ π (٦ + س)^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π (٦ + س) × $\frac{ءس}{ءن}$

= ٨ × π × ١٠ × $\frac{−١}{٢٠ π}$ = −٤ سم^{٢}/دقيقة

∴ مساحة السطح الخارجى تتناقص بمعدل ٤ سم^{٢}/دقيقة

٦٢



① حجم مادة الكرة (ح)

= حجم الكرة الخارجية

− حجم الكرة الداخلية

∴ ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{٢}^{٣}$ − $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{١}^{٣}$

= $\frac{٤}{٣}$ π (نق$_{٢}^{٣}$ − نق$_{١}^{٣}$)

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = $\frac{٤}{٣}$ π [٣ نق$_{٢}^{٢}$ $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ − ٣ نق$_{١}^{٢}$ $\frac{ءنق_{١}}{ءن}$]

∴ صفر = $\frac{٤}{٣}$ π [٣ × ٨١ × $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ − ٣ × ٩ × ١]

∴ $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ = $\frac{١}{٩}$ سم/ث

② مساحة الكرة (م) = ٤ π نق$_{٢}^{٢}$

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق$_{٢}$ $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ = ٨ × π × ٩ × $\frac{١}{٩}$

= ٨ π سم^{٢}/ث

③ بفرق أن السمك "ك" ∴ ك = نق$_{٢}$ − نق$_{١}$

$\frac{ءك}{ءن}$ = $\frac{ءنق_{٢}}{ءن}$ − $\frac{ءنق_{١}}{ءن}$ = $\frac{١}{٩}$ − ١ = −$\frac{٨}{٩}$ سم/ث

٦٣

$\frac{ءح}{ءن}$ = −٢٠ سم^{٣}/ث

∵ ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$

عندما نق = ١٠

−٢٠ = ٤ π × ١٠^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$ ∴ $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{−١}{٢٠ π}$ سم/ث

المساحة (م) = ٤ π نق^{٢}

$\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق $\frac{ءنق}{ءن}$

($\frac{ءم}{ءن}$)$_{نق = ١٠}$ = ٨ × π × ١٠ × $\frac{−١}{٢٠ π}$

= −٤ سم^{٢}/ث

٦٤

بفرض أن حجم البالون "ح"

① ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} $\frac{ءنق}{ءن}$ (١)

−٨ π = ٤ π × (٤)^{٢} × $\frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن}$ = −$\frac{١}{٨}$ سم/د

② بعد ستة دقائق

ح = ٤ × ٨ π − ٨ π × ٦ = ٣٦ π

∴ ٣٦ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ومنها نق = ٣ سم

ومن (١) :

−٨ π = ٤ π × (٣)^{٢} × $\frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{−٢}{٩}$ سم/د

٦٥

∵ ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} × $\frac{ءنق}{ءن}$ (١)

∵ م = ٤ π نق^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ π نق × $\frac{ءنق}{ءن}$ وبتربيع الطرفين

∴ ($\frac{ءم}{ءن}$)^{٢} = (٨ π نق × $\frac{ءنق}{ءن}$)^{٢} (٢)

بضرب (١) × $\frac{ءنق}{ءن}$

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ × $\frac{ءنق}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} × ($\frac{ءنق}{ءن}$)^{٢}

بالتعويض من (٢) :

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ × $\frac{ءنق}{ءن}$ = ٤ π نق^{٢} × ($\frac{ءم}{ءن}$)^{٢} × $\frac{١}{٦٤ π^{٢} نق^{٢}}$

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ × $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{١}{١٦ π}$ × ($\frac{ءم}{ءن}$)^{٢}

، عند $\frac{ءح}{ءن}$ = π سم^{٣}/ث ، $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢ π سم^{٢}/ث

∴ π × $\frac{ءنق}{ءن}$ = $\frac{١}{١٦ π}$ × ٤ π^{٢}

∴ $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{١}{٤}$ سم/ث

، ∵ م = ٤ π نق^{٢} وبالتعويض من (١)

∴ م = $\frac{ءح}{ءن} \div \frac{ءنق}{ءن} = \pi \div \frac{١}{٤} = ٤\pi$ سم^{٢}

٦٦

نفرض أن الضغط = ض ، الحجم = ح

، ∵ ض ∝ $\frac{١}{ح}$ ∴ ض = $\frac{م}{ح}$ حيث م ثابت

، عند ض = ١٠٠٠ ث جم / سم^{٢} ، ح = ٢٥٠ سم^{٣}

∴ ض × ح = ١٠٠٠ × ٢٥٠ = ٢٥٠٠٠٠ (١)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{ءض}{ءن} \times ح + \frac{ءح}{ءن} \times ض = ٠$

$\frac{ءض}{ءن} = \frac{-ض}{ح} \times \frac{ءح}{ءن}$

من (١)

عندما يكون الحجم = ١٠٠ سم^{٣} فإن الضغط

= ٢٥٠٠ ث جم/سم^{٢}

∴ $\frac{ءض}{ءن} = -\frac{٢٥٠٠}{١٠٠} \times -٢ = ٥٠$ ث جم/سم^{٢}/ث

٦٧

∵ حـ = ت × م (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

$\frac{ءحـ}{ءن} = ت \frac{ءم}{ءن} + م \frac{ءت}{ءن}$ (١)

$\frac{ءحـ}{ءن} = ١$ فولت/ث ، $\frac{ءت}{ءن} = \frac{-١}{٢}$ أمبير/ث

عند حـ = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير

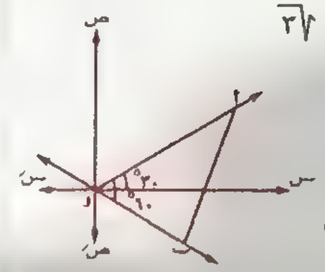
∴ م = $\frac{حـ}{ت} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ أوم

بالتعويض فى (١)

$١ = ٢ \times \frac{ءم}{ءن} + ٦ \times \frac{-١}{٢}$

∴ $\frac{ءم}{ءن} = ٢$ أوم/ث

٦٨



ميل المستقيم $\overleftrightarrow{وب}$ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ قياس الزاوية التى

يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{وب}$

مع الاتجاه الموجب

لمحور السينات = ١٥٠°

، ∵ ق (∠ أ و س) = ٣٠° ∴ ق (∠ ب و أ) = ٦٠°

بعد مرور زمن ن دقيقة من تحرك النقطة ب تكون

النقطة أ قد تحركت (ن + ١) دقيقة وبالتالى فإن

النقطة ب تكون قد قطعت مسافة و ب = ٦ ن متر

، النقطة أ تكون قد قطعت مسافة و أ

= ٤ (ن + ١) = (٤ ن + ٤) متر

وبفرض أن ف المسافة بين النقطتين أ ، ب بعد مرور ن

دقيقة من تحرك ب

فإن : ف^{٢} = (أ ب)^{٢} = (و أ)^{٢} + (و ب)^{٢}

− ٢ × و أ × و ب × جتا ٦٠°

∴ ف^{٢} = (٤ ن + ٤)^{٢} + (٦ ن)^{٢}

− ٢ (٤ ن + ٤) × ٦ ن × $\frac{١}{٢}$

∴ ف^{٢} = ٢٨ ن^{٢} + ٨ ن + ١٦ (١)

وبعد دقيقتين من تحرك النقطة ب

∴ ف^{٢} = ١١٢ + ١٦ + ١٦ = ١٤٤

∴ ف = ١٢ متر

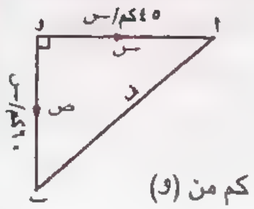
(باشتقاق العلاقة (١) بالنسبة إلى ن)

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٥٦ ن + ٨

∴ ٢ × ١٢ × $\frac{ءف}{ءن}$ = ١٢٠

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٥ متر/دقيقة.

٦٩



نفرض أن القطار الأول

على بعد (س) كم من (و)

والقطار الثانى على بعد (ص) كم من (و)

والمسافة بين القطارين (ف) كم

∴ ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ (١)

، عند الساعة الثالثة ظهرًا

∴ س = ٤ × ٤٥ = ١٨٠ كم

، ص = ٣ × ٦٠ = ١٨٠ كم

∴ ف = $\sqrt{(١٨٠)^{٢} + (١٨٠)^{٢}}$ = ١٨٠ $\sqrt{٢}$ كم

من المعادلة (١) :

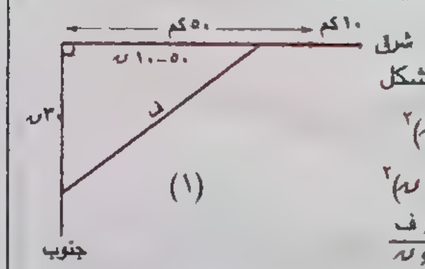
٢ × ١٨٠ $\sqrt{٢}$ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ (١٨٠) (٤٥) + ٢ (١٨٠) (٦٠)

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٥٢,٥ $\sqrt{٢}$ كم/س

٧٠

نفرض أن ف البعد بين السفينتين بعد مرور ن ساعة

من تحرك السفينة لثانية.



من هندسة الشكل

ف^{٢} = (٣٠ ن)^{٢}

+ (٥٠ − ١٠ ن)^{٢} (١)

∴ ٢ ف × $\frac{ءف}{ءن}$

= ٢ (٣٠ ن) (٣٠) + ٢ (٥٠ − ١٠ ن) (−١٠)

فى الساعة العاشرة صباحًا ∴ ن = ١

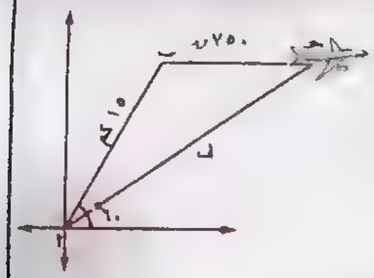
ومن (١) : ∴ ف = ٥٠ كم

∴ ٢ (٥٠) $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ (٣٠) (٣٠) + ٢ (٤٠) (−١٠)

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ١٠ كم/ساعة

∵ $\frac{ءف}{ءن} > ٠$ ∴ السفينتان تتباعدان.

٧١



من هندسة الشكل

ف^{٢} = (١٥)^{٢} + (٧٥٠ ن)^{٢} − ٢ (١٥) (٧٥٠ ن) جتا ١٢٠°

ف^{٢} = ٢٢٥ + ٥٦٢٥٠٠ ن^{٢} + ١١٢٥٠ ن (١)

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ × ٥٦٢٥٠٠ ن + ١١٢٥٠

بعد مرور ٢ دقيقة

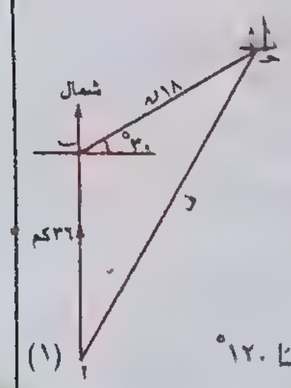
أى أن ن = $\frac{١}{٣٠}$ ساعة

ومن (١) ف = ٣٥ كم

∴ ٢ × ٣٥ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ × ٥٦٢٥٠٠ × $\frac{١}{٣٠}$ + ١١٢٥٠

∴ $\frac{ءف}{ءن} = \frac{٤٨٧٥}{٧}$ كم/ساعة.

٧٢



أ ب = ٢ × ١٨

= ٣٦ كم

، حـ ب = ١٨ ن

ومن هندسة الشكل

ف^{٢} = (٣٦)^{٢} + (١٨ ن)^{٢}

− ٢ (٣٦) (١٨ ن) جتا ١٢٠° (١)

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ (١٨ ن) × ١٨ + ٣٦ × ١٨

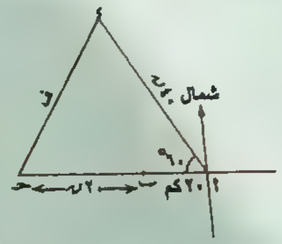
وبعد ٤ ساعات من بدء الحركة ∴ ن = ٢

ومن (١) ف = ٣٦ $\sqrt{٣}$ كم

∴ ٢ × ٣٦ $\sqrt{٣}$ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ × ١٨ × ٢ × ١٨ + ٣٦ × ١٨

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٩ $\sqrt{٣}$ كم/ساعة.

٧٣



أب = ٢٠ كم

ب حـ = ٢٠ ن

، أ و = ٤٠ ن

ومن هندسة الشكل :

ف^{٢} = (٢٠ ن + ٢٠)^{٢} + (٤٠ ن)^{٢} − ٢ (٤٠ ن) (٢٠ ن + ٢٠) جتا ٦٠ (١)

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ (٢٠ ن + ٢٠) (٢٠) + ٢ (٤٠ ن) (٤٠) − (٤٠) (٢٠ ن + ٢٠) − ٢٠ (٤٠ ن)

الساعة ١١ صباحًا ∴ ن = ١ ساعة

ومن (١) ف = ٤٠ كم

∴ ٢ × ٤٠ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ (٤٠) (٢٠) + ٢ (٤٠) (٤٠) − ٤٠ (٤٠) − ٢٠ (٤٠)

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٣٠ كم/ساعة.

٧٤

$\frac{ءθ}{ءن}$ = ± $\frac{١}{٢}$ دائرى/ث

ظا θ = $\frac{١٠}{س}$

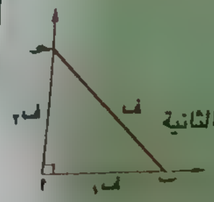
∴ قا^{٢} θ $\frac{ءθ}{ءن}$ = −١٠ س$^{-٢}$ $\frac{ءس}{ءن}$

عندما θ = ٣٠° ∴ س = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ قا^{٢} ٣٠° × ± $\frac{١}{٢}$ = −١٠ (١٠ $\sqrt{٣}$)$^{-٢}$ × $\frac{ءس}{ءن}$

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ± ٢٠ م/ث ∴ السرعة = ٢٠ م/ث

٧٥



عند أى لحظة من تحركهما معًا نفرض أن زمن تحرك السيارة الثانية = ن ساعة

∴ زمن الأولى = (ن + $\frac{١}{٦}$) ساعة

∴ ف$_{١}$ = ٤٠ (ن + $\frac{١}{٦}$) ، ف$_{٢}$ = ٦٠ ن

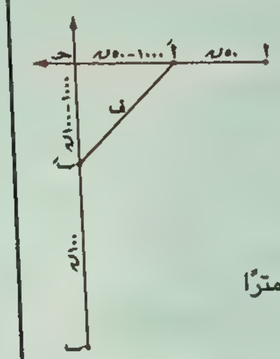
∴ ف^{٢} = ١٦٠٠ (ن + $\frac{١}{٦}$)^{٢} + ٣٦٠٠ ن^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٣٢٠٠ (ن + $\frac{١}{٦}$) + ٧٢٠٠ ن

، عند ن = ٢٠ دقيقة = $\frac{١}{٣}$ ساعة

فإن : ف = ٢٠ $\sqrt{٢}$ كم ∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٥٠ $\sqrt{٢}$ كم/س

٧٦



بعد زمن ن دقيقة يتحرك

الرجل الأول = ٥٠ ن مترًا

فيصبح بعده عن حـ

يساوى ١٠٠٠ − ٥٠ ن

والرجل الثانى يتحرك ١٠٠ ن مترًا

فيصبح بعدة عن حـ

يساوى ١٠٠٠ − ١٠٠ ن

∴ مربع البعد بين الرجلين :

ف^{٢} = (١٠٠٠ − ٥٠ ن)^{٢} + (١٠٠٠ − ١٠٠ ن)^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ (١٠٠٠ − ٥٠ ن) × −٥٠ + ٢ (١٠٠٠ − ١٠٠ ن) × −١٠٠

، عندما ن = ٤ فإن : ف = ١٠٠٠ متر

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = −١٠٠ متر/دقيقة.

أى أن الرجلين يقتربان بمعدل ١٠٠ متر/دقيقة

وعندما $\frac{ءف}{ءن}$ = ٠ ∴ ن = ١٢ دقيقة

∴ الرجلان يبدأن فى التباعد عن بعضها عندما ن > ١٢ دقيقة.

٧٧

$\frac{ءس}{ءن}$ = ٤ سم/ث

∵ ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ س ص جا ١٥٠° ∴ س ص = ١٢٠

∴ س $\frac{ءص}{ءن}$ + ص $\frac{ءس}{ءن}$ = ٠ عندما س = ٨ سم

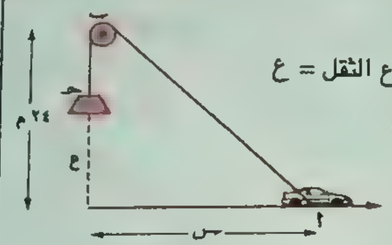
∴ ص = ١٢٠ ÷ ٨ = ١٥ سم

∴ ٨ $\frac{ءص}{ءن}$ + ١٥ × ٤ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = −٧,٥ سم/ث

أى أن «ب» تتحرك نحو (و) بسرعة ٧,٥ سم/ث

٧٨



نفرض أن ارتفاع الثقل = ع

وبعد السيارة عن موقع مسقط البكرة = س

∴ ب حـ = ٢٤ − ع

، أ ب = ٥٠ − (٢٤ − ع) = ٢٦ + ع

ومن هندسة الشكل :

∴ (٢٦ + ع)^{٢} = س^{٢} + (٢٤)^{٢} (١)

∴ ٢ (٢٦ + ع) $\frac{ءع}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$

، عندما س = ٣٢ مترًا

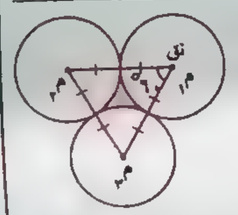
، من معادلة (١) : ∴ (٢٦ + ع)^{٢} = ١٦٠٠

∴ ع = ١٤ مترًا

∴ ٢ (٢٦ + ١٤) × $\frac{ءع}{ءن}$ = ٢ × ٣٢ × ١٨

∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = ١٤,٤ م/ث

٧٩



∵ م (مساحة المنطقة المظللة)

= مساحة Δ م$_{١}$ م$_{٢}$ م$_{٣}$

− $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة الواحدة

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق × ٢ نق × جا ٦٠° − $\frac{١}{٢}$ π نق^{٢}

= ($\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ π) نق^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢ ($\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ π) نق × $\frac{ءنق}{ءن}$

= ٢ ($\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ π) × ١٠ × ١

= (٢٠ $\sqrt{٣}$ − ١٠ π) سم/د

٨٠

① ∵ ص = $\sqrt{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ $\frac{ءس}{ءن}$ وعندما س = ٤

∴ ١ = $\frac{١}{٤}$ × $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٤ وحدة طول/ث

② بفرض أن المسافة (و أ) = ف

∴ ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$

، وعندما س = ٤

فإن : ص = ٢ ، ف = ٢ $\sqrt{٥}$

∴ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = س $\frac{ءس}{ءن}$ + ص $\frac{ءص}{ءن}$

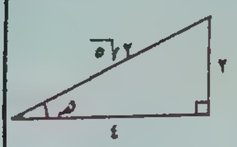
∴ ٢ $\sqrt{٥}$ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٤ × ٤ + ٢ × ١

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = $\frac{١٨}{٢\sqrt{٥}}$ = $\frac{٩\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول/ث

③ ∵ ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{\sqrt{س}}{س}$ = س$^{-\frac{١}{٢}}$

∴ قا^{٢} هـ × $\frac{ءهـ}{ءن}$ = −$\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$ $\frac{ءس}{ءن}$

وعند س = ٤

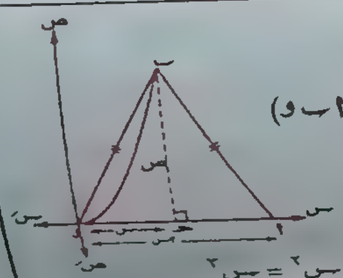


∴ ($\frac{٢\sqrt{٥}}{٤}$)^{٢} $\frac{ءهـ}{ءن}$

= −$\frac{١}{٢}$ × (٤)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٤

∴ $\frac{ءهـ}{ءن}$ = (−$\frac{١}{٥}$)^{ء}/ث

٨١



∵ م (مساحة المثلث أ ب و)

= $\frac{١}{٢}$ أ و × ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ س × ص

∴ م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ س × س^{٢} = س^{٣}

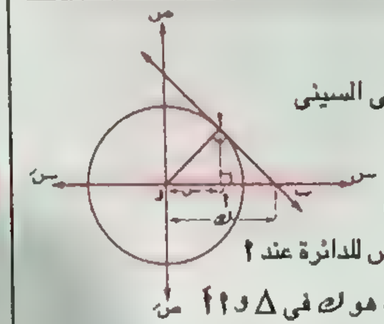
∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٣ س^{٢} × $\frac{ءس}{ءن}$

بعد ٥ ثوان من بدء الحركة نجد أن :

∴ ٢ س = ٢ × ٥ = ١٠ وحدات ∴ س = ٥

∴ $\frac{ع م}{ع ن}$ = ٣ × (٥)^{٢} × ١ = ٧٥ وحدة مربعة/ث

٨٣



نفرض أن الاحداثي السيني لنقطة أ هو س والإحداثي السيني لنقطة تقاطع المماس للدائرة عند أ مع محور السينات هو ل في Δ و أ أ

∵ $\overline{و أ}$ ⊥ المماس $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ أ}$ ⊥ $\overline{ب و}$

∴ (و أ)^{٢} = و أ × و ب ∴ (١)^{٢} = س × ل

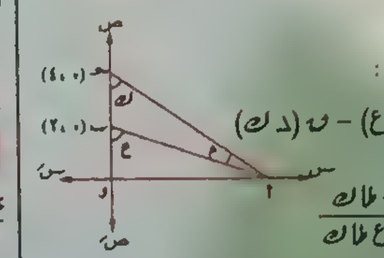
∴ ل = $\frac{١}{س}$ = س$^{-١}$

∴ $\frac{ع ل}{ع ن}$ = − س$^{-٢}$ $\frac{ع س}{ع ن}$

وعندما ل = ٢ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{ع ل}{ع ن}$ = − $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢}$ × ٣ = −١٢ وحدة طول/ث

٨٢



من هندسة الشكل :

ظا (ل م) = ظا (ل ع) − ظا (ل ل)

∴ طا م = $\frac{طا ع - طا ل}{١ + طا ع طا ل}$

= $\frac{\frac{س}{٢} - \frac{س}{٤}}{١ + \frac{س^{٢}}{٨}}$ = $\frac{٢ س}{س^{٢} + ٨}$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ ن

∴ قا^{٢} م × $\frac{ع م}{ع ن}$

= $\frac{(س^{٢} + ٨) \times ٢ - ٢ س \times ٢ س}{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ × $\frac{ع س}{ع ن}$

∴ قا^{٢} م × $\frac{ع م}{ع ن}$ = $\frac{١٦ - ٢ س^{٢}}{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ × $\frac{ع س}{ع ن}$

، عندما تصل أ إلى النقطة (٢ ، ٠)

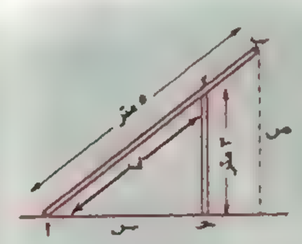
∴ طا م = $\frac{١}{٣}$

∴ قا م = $\frac{\sqrt{١٠}}{٣}$

∴ $\frac{١٠}{٩}$ × $\frac{ع م}{ع ن}$ = $\frac{١٦ - ٢ \times ٤}{١٤٤}$ × $\frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{ع م}{ع ن}$ = $\left(\frac{١}{٣٠}\right)$ ء/د

٨٤



$\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{٥}{٤}$ متر/د

∵ Δ أ حـ ء قائم الزاوية في حـ

∴ أ ء = $\sqrt{٩ + س^{٢}}$

ومن تشابة المثلثين ∴ $\frac{\sqrt{٩ + س^{٢}}}{٥}$ = $\frac{٣}{ص}$

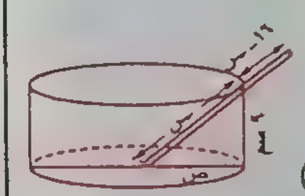
∴ ص = $\frac{١٥}{\sqrt{٩ + س^{٢}}}$ = ١٥ (٩ + س^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ١٥ × $\frac{-١}{٢}$ (٩ + س^{٢})$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٢ س × $\frac{ع س}{ع ن}$

وعندما تكون ب عند ء فإن س = ٤ سم

∴ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = $\frac{-٣}{٥}$ م/د

٨٥



$\frac{ع س}{ع ن}$ = ٢ سم/ث

س^{٢} = ص^{٢} + ٨١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٢ ص $\frac{ع ص}{ع ن}$

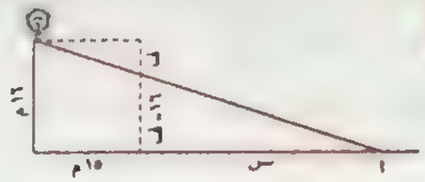
$\frac{ع ص}{ع ن}$ = $\frac{س}{ص}$ $\frac{ع س}{ع ن}$

عندما يصل الساق إلى نهاية القاعدة

ص = ١٢ سم ∴ س = ١٥ سم

$\frac{ع ص}{ع ن}$ = $\frac{١٥}{١٢}$ × ٢ = $\frac{٥}{٢}$ سم/ث

٨٦



من هندسة الشكل : $\frac{١٦ - ف}{س}$ = $\frac{ف}{١٥}$

∴ س = $\frac{٢٤٠ - ١٥ ف}{ف}$ ∴ س = ٢٤٠ ف$^{-١}$ − ١٥

، ∵ ف = ع ن + $\frac{١}{٢}$ $\frac{ع ن^{٢}}{}$

∴ ف = ٤,٩ ن^{٢}

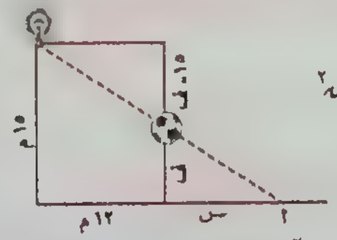
∴ س = ٢٤٠ (٤,٩ ن^{٢})$^{-١}$ − ١٥ = $\frac{٢٤٠ ن^{-٢}}{٤,٩}$ − ١٥

$\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{-٤٨٠٠}{٤٩}$ ن$^{-٣}$ وعندما ف = ١٠ م

∴ ن = $\frac{١٠}{٧}$ ث ∴ $\frac{ع س}{ع ن}$ = − ٣٣,٦ م/ث

أى أن ظل الكرة يتحرك مقتربًا من مسقط الكرة على الأرض بسرعة ٣٣,٦ م/ث

٨٧



ف = ع ن + $\frac{١}{٢}$ $\frac{ع ن^{٢}}{}$

ف = ٥ ن − $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × ن^{٢}

∴ ف = ٥ ن − ٤,٩ ن^{٢}

ومن هندسة الشكل : $\frac{ف}{س}$ = $\frac{١٥ - ف}{١٢}$

∴ س = $\frac{١٢ ف}{١٥ - ف}$

∴ $\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{(١٥ - ف) \times ١٢ - ١٢ ف \times (-١)}{(١٥ - ف)^{٢}}$ × $\frac{ع ف}{ع ن}$

= $\frac{١٨٠}{(١٥ - ف)^{٢}}$ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = $\frac{١٨٠}{(١٥ - ف)^{٢}}$ × (٥ − ٩,٨ ن)

، عند ن = $\frac{١}{٢}$ ث

فإن ف = $\frac{٥}{٢}$ − ٤,٩ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = ١,٢٧٥

∴ $\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{١٨٠}{(١٥ - ١,٢٧٥)^{٢}}$ × $\left(٥ - ٩,٨ \times \frac{١}{٢}\right)$

≈ ٠,٠٩٥٥٥ م/ث

٨٨

① (ب) ② (جـ) ③ (ب)

إرشادات لحل رقم ٨٨

① بفرض أن ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ ، .... ، ل$_{م}$ هى أطول أضلاع المضلع ، ح هى محيط المضلع

∴ ح = ل$_{١}$ + ل$_{٢}$ + ... + ل$_{م}$

∴ $\frac{ع ح}{ع ن}$ = $\frac{ع ل_{١}}{ع ن}$ + $\frac{ع ل_{٢}}{ع ن}$ + ... + $\frac{ع ل_{م}}{ع ن}$

، ∵ $\frac{ع ل_{١}}{ع ن}$ = $\frac{ع ل_{٢}}{ع ن}$ = ... = $\frac{ع ل_{م}}{ع ن}$ = أ

∴ $\frac{ع ح}{ع ن}$ = م أ

أى أن المحيط يزداد بمعدل (م أ) سم/ث

② بفرض أن ح$_{١}$ هو حجم الخزان الأصغر وارتفاع الماء به هو ع$_{١}$

، ح$_{٢}$ هو حجم الخزان الأكبر وارتفاع الماء به هو ع$_{٢}$

، ∵ الحجم = π نق^{٢} ع

∴ ح$_{١}$ = π × (٤)^{٢} ع$_{١}$ = ١٦ π ع$_{١}$

∴ $\frac{ع ح_{١}}{ع ن}$ = ١٦ π $\frac{ع ع_{١}}{ع ن}$

، ح$_{٢}$ = π × (٨)^{٢} ع$_{٢}$ = ٦٤ π ع$_{٢}$

∴ $\frac{ع ح_{٢}}{ع ن}$ = ٦٤ π $\frac{ع ع_{٢}}{ع ن}$

، ∵ تدفق المياه فى الخزانان بنفس المعدل

أى أن $\frac{ع ح_{١}}{ع ن}$ = $\frac{ع ح_{٢}}{ع ن}$

∴ ١٦ π $\frac{ع ع_{١}}{ع ن}$ = ٦٤ π $\frac{ع ع_{٢}}{ع ن}$

، ∵ $\frac{ع ع_{١}}{ع ن}$ = $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة

∴ $\frac{ع ع_{٢}}{ع ن}$ = $\frac{١}{٨}$ م/دقيقة

③ ∵ حجم الأسطوانة (ح) = π نق² ع

، ∵ نق ثابتة.

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = π نق² $\frac{ءع}{ءن}$ ، ∵ $\frac{ءح}{ءن}$ = ثابت

∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = ثابت ∴ ع = $ع_{٠}$ + ثابت × ن

، ∵ $ع_{٠}$ (الارتفاع عند البدء) = صفر

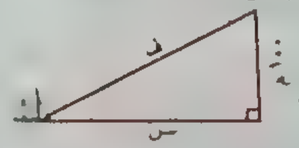
∴ ع = ثابت × ن

∴ العلاقة خطية بين ع ، ن وتمر بنقطة الأصل

∴ الشكل الصحيح هو (ب)

٨٩

بفرض أن شدة الإستضاءة ض



∴ ض = $\frac{ك}{ف^{٢}}$

∵ (١٠٠)² + س² = ف²

∴ ض = ك ف⁻²

ض = ك (١٠٠٠٠ + س²)⁻¹

$\frac{ءض}{ءن}$ = − ك (١٠٠٠٠ + س²)⁻² (٢ س) × $\frac{ءس}{ءن}$

وعند س = ١٠٠ م

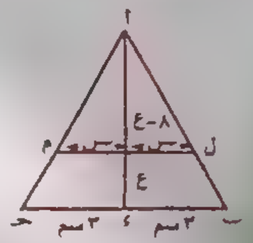
∴ $\frac{ءض_{١}}{ءن}$ = − ك × ٥ × ١٠⁻⁷ × $\frac{ءس}{ءن}$

، وعند س = ٢٠٠ م

$\frac{ءض_{٢}}{ءن}$ = − ك × ١,٦ × ١٠⁻⁷ × $\frac{ءس}{ءن}$ وبالقسمة

∴ $\frac{ءض_{١}}{ءن}$ ÷ $\frac{ءض_{٢}}{ءن}$ = $\frac{٥}{١,٦}$ = $\frac{٢٥}{٨}$

٩٠



$\frac{ءع}{ءن}$ = − $\frac{١}{٢}$ سم/ث

من هندسة الشكل

$\frac{س}{٣}$ = $\frac{٨ - ع}{٨}$

∴ س = $\frac{٣ (٨ - ع)}{٨}$

مساحة شبه المنحرف (م) = $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٦) × ع

= (س + ٣) ع

= [$\frac{٣}{٨}$ (٨ − ع) + ٣] × ع

= ٦ ع − $\frac{٣}{٨}$ ع²

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٦ $\frac{ءع}{ءن}$ − $\frac{٣}{٤}$ ع $\frac{ءع}{ءن}$

= ٦ × − $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٣}{٤}$ × ٤ × − $\frac{١}{٢}$

= − ١,٥ سم²/ث

٩١

نفرض أن و ب = س

∴ مساحة المستطيل (م) = س (١٦ − ٢ س)

∴ م = ١٦ س − ٢ س²

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = (١٦ − ٤ س) $\frac{ءس}{ءن}$

وعندما $\frac{ءس}{ءن}$ = − $\frac{١}{٤}$ ، س = ٣ سم

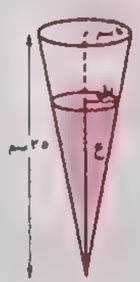
∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = (١٦ − ٤ × ٣) × − $\frac{١}{٤}$ = − ١٠ سم²/ث

، عندما $\frac{ءم}{ءن}$ = صفر ∴ ١٦ − ٤ س = صفر

∴ س = ٤ سم

∴ مساحة المستطيل = ١٦ × ٤ − ٢ × ٤² = ٣٢ سم²

٩٢



معدل زيادة حجم المخروط (ح)

= ٥,٤ − ٣,٢ = ٢,٢ سم³/ث

، حجم المخروط (ح) = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

ومن هندسة الشكل

$\frac{نق}{ع}$ = $\frac{٧}{٣٥}$ ∴ نق = $\frac{١}{٥}$ ع

∴ ح = $\frac{١}{٣}$ π ($\frac{١}{٥}$ ع)² × ع ح = $\frac{π}{٧٥}$ ع³

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = $\frac{π}{٢٥}$ ع² $\frac{ءع}{ءن}$

وعندما ع = ٢٥ سم ∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = ٠,٠٢٨ سم/ث

٩٣

حجم المخروط (ح) = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

، ومن هندسة الشكل

$\frac{نق}{٨٠}$ = $\frac{ع}{١٦٠}$

∴ نق = $\frac{١}{٢}$ ع

∴ الحجم (ح) = $\frac{١}{٣}$ π ($\frac{١}{٢}$ ع)² ع

∴ ح = $\frac{π}{١٢}$ ع³ ∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = $\frac{π}{٤}$ ع² $\frac{ءع}{ءن}$

، حجم الماء في الاسطوانة = π نق² $ع_{١}$ = π (٥٠)² $ع_{١}$

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٢٥٠٠ π $\frac{ءع_{١}}{ءن}$

، ∵ القيمة العددية لـ $\frac{ءح}{ءن}$ للمخروط = القيمة العددية

لـ $\frac{ءح}{ءن}$ للاسطوانة وكذلك $\frac{ءع}{ءن}$ ، $\frac{ءع_{١}}{ءن}$

∴ $\frac{π}{٤}$ ع² $\frac{ءع}{ءن}$ = ٢٥٠٠ π $\frac{ءع_{١}}{ءن}$

∴ ع = ١٠٠ سم

٩٤

أبعاد متوازي المستطيلات عند أي لحظة

هي ٣ + ٢ن ، ٤ + ن ، ١٢ − ٣ن

∴ حجم متوازي المستطيلات في أي لحظة

ح = (٣ + ٢ن) (٤ + ن) (١٢ − ٣ن)

= ١٤٤ + ٩٦ن − ٩ن² − ٦ن³

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٩٦ − ١٨ن − ١٨ن²

($\frac{ءح}{ءن}$)$_{ن=٢}$ = −١٢ سم³/ث

إذا كان قطر متوازي المستطيلات = ل

∴ ل² = (٣ + ٢ن)² + (٤ + ن)² + (١٢ − ٣ن)²

٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$ = ٢ (٣ + ٢ن) × ٢ + ٢ (٤ + ن)

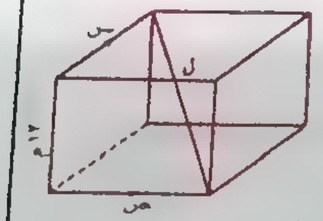
+ ٢ (١٢ − ٣ن) × −٣

عند ن = ٢ فإن ل = ١١

($\frac{ءل}{ءن}$)$_{ن=٢}$ = $\frac{٧ × ٢ + ٦ + ٦ × −٣}{١١}$

= $\frac{٢}{١١}$ سم/ث

٩٥



$\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ م/د

$\frac{ءص}{ءن}$ = ٦ م/د

ومن هندسة الشكل

ل² = س² + ص² + (١٢)² (١)

∵ ٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$

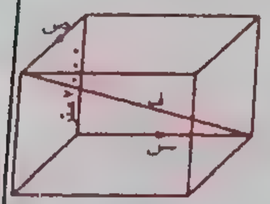
بعد ٦ دقائق : س = ٣ × ٦ = ١٨ م

، ص = ٦ × ٦ = ٣٦ م ومن (١) ∴ ل = ٤٢ م

∴ ٢ × ٤٢ × $\frac{ءل}{ءن}$ = ٢ × ١٨ × ٣ + ٢ × ٣٦ × ٦

∴ $\frac{ءل}{ءن}$ = $\frac{٤٥}{٧}$ م/د

٩٦



$\frac{ءص}{ءن}$ = ١٥٠ م/ث

$\frac{ءس}{ءن}$ = ٧٥ م/ث

من هندسة الشكل

ف² = (٢٠٠٠)² + س² + ص² (١)

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$

بعد ٤٠ ث

ص = ٤٠ × ١٥٠ = ٦٠٠٠ م

س = ٤٠ × ٧٥ = ٣٠٠٠ م

ومن (١) ف = ٧٠٠٠ م

∴ ٢ × ٧٠٠٠ × $\frac{ءف}{ءن}$ − ٢ × ٣٠٠٠ × ٧٥

+ ٢ × ٦٠٠٠ × ١٥٠

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = $\frac{٥}{٧}$ ١٦٠ م/ث

إجابات الوحدة 2

تفاضل وتكامل
الدوال الأسية واللوغاريتمية

إجابات تمارين المتطلبات القبلية الجبرية

٥

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (د)

٦

① لو (س − ٣) = ٢

س − ٣ = $١٠^{٢}$ = ١٠٠

س = ١٠٣ ∴ م.ح = {١٠٣}

② $لو_{هـ}$ س = ٤

∴ س = $هـ^{٤}$ ∴ م.ح = {$هـ^{٤}$}

③ $لو_{٢}$ (س + ٧) = ٥

س + ٧ = $٢^{٥}$ = ٣٢

س = ٢٥ ∴ م.ح = {٢٥}

④ $لو_{هـ}$ (٢ س + ١) = ٥

٢ س + ١ = $هـ^{٥}$ س = $\frac{هـ^{٥} - ١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{هـ^{٥} - ١}{٢}$}

⑤ ٢ $هـ^{س}$ = ٢١ $هـ^{س}$ = $\frac{٢١}{٢}$

س = $لو_{هـ}$ $\frac{٢١}{٢}$ ∴ م.ح = {$لو_{هـ}$ $\frac{٢١}{٢}$}

⑥ $هـ^{س}$ = ١٠

س = $لو_{هـ}$ ١٠ ∴ م.ح = {$لو_{هـ}$ ١٠}

⑦ $هـ^{٥ س + ١}$ = ٢٠ ٥ س + ١ = $لو_{هـ}$ ٢٠

∴ س = $\frac{لو_{هـ} ٢٠ - ١}{٥}$

م.ح = {$\frac{لو_{هـ} ٢٠ - ١}{٥}$}

⑧ $هـ^{٢ س + ١}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ٢ س + ١ = $لو_{هـ}$ $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{لو_{هـ} \frac{١}{٢} - ١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{لو_{هـ} \frac{١}{٢} - ١}{٢}$}

⑨ $٧^{س}$ = ٢٥

س = $لو_{٧}$ ٢٥ ∴ م.ح = {$لو_{٧}$ ٢٥}

⑩ $لو_{هـ}$ (س + ١) − $لو_{هـ}$ (س − ٢) = $لو_{هـ}$ ٤

$لو_{هـ}$ $\frac{(س + ١)}{(س - ٢)}$ = $لو_{هـ}$ ٤

∴ $\frac{(س + ١)}{(س - ٢)}$ = ٤

∴ س + ١ = ٤ س − ٨

منها ٣ س = ٩ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

⑪ $لو_{هـ}$ س + $لو_{هـ}$ (س − ٣) = ٠

$لو_{هـ}$ س (س − ٣) = ٠

س (س − ٣) = $هـ^{٠}$ = ١

$س^{٢}$ − ٣ س − ١ = ٠

أ = ١ ، ب = −٣ ، حـ = −١ باستخدام القانون العام

س = $\frac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢}$ ، س = $\frac{٣ - \sqrt{١٣}}{٢}$ (مرفوضة)

∴ م.ح = {$\frac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢}$}

⑫ $لو_{هـ}$ ٢ + $لو_{هـ}$ س = ٤

$لو_{هـ}$ ٢ س = ٤ ٢ س = $هـ^{٤}$

∴ س = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{٤}$ ∴ م.ح = {$\frac{١}{٢}$ $هـ^{٤}$}

⑬ $لو_{هـ}$ $٤^{٢ س - ١}$ = $لو_{هـ}$ ٥٠

∴ $٤^{٢ س - ١}$ = ٥٠

٢ س − ١ = $لو_{٤}$ ٥٠ منها س = $\frac{لو_{٤} ٥٠ + ١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{لو_{٤} ٥٠ + ١}{٢}$}

⑭ $لو_{هـ}$ $هـ^{س}$ = ٣ $لو_{هـ}$ ٣

$لو_{هـ}$ $هـ^{س}$ = $لو_{هـ}$ $٣^{٣}$ $هـ^{س}$ = $٣^{٣}$ = ٢٧

س = $لو_{هـ}$ ٢٧ ∴ م.ح = {$لو_{هـ}$ ٢٧}

⑮ ٢ $لو_{هـ}$ (س − ٣) = $لو_{هـ}$ (س + ٥) + $لو_{هـ}$ ٤

$لو_{هـ}$ $(س - ٣)^{٢}$ = $لو_{هـ}$ ٤ (س + ٥)

$(س - ٣)^{٢}$ = ٤ (س + ٥)

$س^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٤ س + ٢٠

$س^{٢}$ − ١٠ س − ١١ = ٠

س = ١١ ، س = −١ (مرفوض)

∴ م.ح = {١١}

⑯ س − س $هـ^{٢ س - ٣}$ = ٠

س (١ − $هـ^{٢ س - ٣}$) = ٠

س = ٠ أ، ١ − $هـ^{٢ س - ٣}$ = ٠

$هـ^{٢ س - ٣}$ = ١

٢ س − ٣ = ٠

س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ م.ح = {٠ ، $\frac{٣}{٢}$}

⑰ ٢٤ − $هـ^{-٢ س}$ = ١٠

$هـ^{-٢ س}$ = ١٤ −٢ س = $لو_{هـ}$ ١٤

س = $\frac{-١}{٢}$ $لو_{هـ}$ ١٤

∴ م.ح = {$\frac{-١}{٢}$ $لو_{هـ}$ ١٤}

⑱ $هـ^{س}$ + ٦ $هـ^{-س}$ = ٥ بالضرب × $هـ^{س}$

$هـ^{٢ س}$ + ٦ = ٥ × $هـ^{س}$

$هـ^{٢ س}$ − ٥ × $هـ^{س}$ + ٦ = ٠

$هـ^{س}$ = ٣ أ، $هـ^{س}$ = ٢

س = $لو_{هـ}$ ٣ أ، س = $لو_{هـ}$ ٢

∴ م.ح = {$لو_{هـ}$ ٣ ، $لو_{هـ}$ ٢}

⑲ $هـ^{س}$ + $هـ^{-س}$ = ٢

بالضرب × $هـ^{س}$

$هـ^{٢ س}$ + ١ = ٢ × $هـ^{س}$

$هـ^{٢ س}$ − ٢ × $هـ^{س}$ + ١ = ٠

∴ $هـ^{س}$ = ١ ∴ س = ٠

∴ م.ح = {٠}

⑳ ٥ × $هـ^{س^{٢}}$ = ٢٠٠

$هـ^{س^{٢}}$ = ٤٠ $س^{٢}$ = $لو_{هـ}$ ٤٠

س = ± $\sqrt{لو_{هـ} ٤٠}$

∴ م.ح = {$\sqrt{لو_{هـ} ٤٠}$ ، −$\sqrt{لو_{هـ} ٤٠}$}

اختبار تحصيلي 6

٥

① $\lim_{س \to \infty}$ [(١ + $\frac{١}{س}$)^{س}]^{٢} = $هـ^{٣}$

② $\lim_{س \to \infty}$ [(١ + $\frac{١}{س}$)^{س}]$^{\frac{١}{٥}}$ = $هـ^{\frac{١}{٥}}$

③ $\lim_{س \to \infty}$ (١ + $\frac{١}{س}$)$^{٥ س}$

= $\lim_{س \to \infty}$ [(١ + $\frac{١}{س}$)^{س}]^{٥} = $هـ^{٥}$

④ $\lim_{س \to \infty}$ (١ + $\frac{٥}{س}$)^{س}

بفرض أن ص = $\frac{٥}{س}$ منها س = $\frac{٥}{ص}$

فى حالة س ⟵ ∞ ∴ ص ⟵ ٠

$\lim_{ص \to ٠}$ (١ + ص)$^{\frac{٥}{ص}}$

= $\lim_{ص \to ٠}$ [(١ + ص)$^{\frac{١}{ص}}$]^{٥} = $هـ^{٥}$

⑤ $\lim_{ن \to \infty}$ (١ + $\frac{٢}{ن}$)$^{٣ ن}$

بفرض أن م = $\frac{٢}{ن}$ منها ن = $\frac{٢}{م}$

فى حالة ن ⟵ ∞ ∴ م ⟵ ٠

∴ $\lim_{م \to ٠}$ (١ + م)$^{\frac{٦}{م}}$

= $\lim_{م \to ٠}$ [(١ + م)$^{\frac{١}{م}}$]^{٦} = $هـ^{٦}$

⑥ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}+1}$

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \times \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)\right]$

$= \text{هـ}^{1} \times 1 = \text{هـ}$

⑦ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{2\text{س}+5}$

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{2} \times \left[1 + \frac{1}{\text{س}}\right]^{5}$

$= \text{هـ}^{2} \times 1^{5} = \text{هـ}^{2}$

⑧ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}+1}\right)^{2\text{س}}$

بفرض أن . $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}+1}$ منها $\text{س} = \frac{1}{\text{ص}} - 1$

فى حالة $\text{س} \to \infty$ ∴ $\text{ص} \to$ صفر

∴ $\underset{\text{ص} \to \text{صفر}}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{2}{\text{ص}} - 2}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \left[(1 + \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{2} \div \left[1 + \text{ص}\right]^{2}$

$= \text{هـ}^{2} \div 1^{2} = \text{هـ}^{2}$

⑨ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{4}{\text{س}}\right)^{\text{س}+2}$

بفرض أن $\text{ص} = \frac{4}{\text{س}}$ منها $\text{س} = \frac{4}{\text{ص}}$

فى حالة $\text{س} \to \infty$ ∴ $\text{ص} \to$.

∴ $\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{4}{\text{ص}} + 2}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \left[(1 + \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{4} \times \left[1 + \text{ص}\right]^{2}$

$= \text{هـ}^{4} \times 1 = \text{هـ}^{4}$

⑩ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 - \frac{1}{\text{س}}\right)^{2\text{س}}$

بفرض أن $\frac{-1}{\text{س}} = \text{ص}$ منها $\text{س} = \frac{-1}{\text{ص}}$

فى حالة $\text{س} \to \infty$ ∴ $\text{ص} \to$.

∴ $\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{-2}{\text{ص}}}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \left[(1 + \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{-2} = \text{هـ}^{-2} = \frac{1}{\text{هـ}^{2}}$

⑪ $\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ن}+1-1}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}}$

$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 - \frac{1}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}}$

بفرض أن : $\text{م} = \frac{-1}{\text{ن}+1}$ منها $\text{ن} = \left(\frac{-1}{\text{م}} - 1\right)$

فى حالة $\text{ن} \to \infty$ ∴ $\text{م} \to$ صفر

∴ $\underset{\text{م} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{م})^{-1 - \frac{1}{\text{م}}}$

$= \underset{\text{م} \to}{\text{نهـا}} \left((1 + \text{م})^{\frac{1}{\text{م}}}\right)^{-1} \times (1 + \text{م})^{-1}$

$= \text{هـ}^{-1} \times 1^{-1} = \frac{1}{\text{هـ}}$

⑫ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}+7}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{4}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

بفرض أن : $\text{ص} = \frac{4}{\text{س}+3}$ منها $\text{س} = \frac{4}{\text{ص}} - 3$

فى حالة $\text{س} \to \infty$ ∴ $\text{ص} \to$.

∴ $\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{4}{\text{ص}} - 3 + 4}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{4}{\text{ص}} + 1}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \left((1 + \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right)^{4} \times (1 + \text{ص})^{1}$

$= \text{هـ}^{4} \times 1 = \text{هـ}^{4}$

⑬ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{2\text{س}-1}{2\text{س}+1}\right)^{2\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 - \frac{2}{2\text{س}+1}\right)^{2\text{س}}$

بفرض أن : $\text{ص} = \frac{-2}{2\text{س}+1}$ منها $\text{س} = \frac{-1}{\text{ص}} - \frac{1}{2}$

فى حالة $\text{س} \to \infty$ ∴ $\text{ص} \to$ صفر

∴ $\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{-2}{\text{ص}} - 1}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \left((1 + \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right)^{-2} \times (1 + \text{ص})^{-1}$

∴ $\text{هـ}^{-2} \times 1^{-1} = \frac{1}{\text{هـ}^{2}}$

⑭ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{2\text{س}+5}{2\text{س}+1}\right)^{\text{س}+2}$

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{4}{2\text{س}+1}\right)^{\text{س}+2}$

بفرض أن : $\text{ص} = \frac{4}{2\text{س}+1}$ منها $\text{س} = \frac{2}{\text{ص}} - \frac{1}{2}$

فى حالة $\text{س} \to \infty$ فإن : $\text{ص} \to$.

∴ $\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{2}{\text{ص}} - \frac{1}{2} + 2}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} (1 + \text{ص})^{\frac{2}{\text{ص}} + \frac{3}{2}}$

$= \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \left((1 + \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right)^{2} \times (1 + \text{ص})^{\frac{3}{2}}$

$= \text{هـ}^{2} \times 1^{\frac{3}{2}} = \text{هـ}^{2}$

---

① $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{3\text{س}} - 1}{\text{س}} = 3 \underset{3\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{3\text{س}} - 1}{3\text{س}}$

$= 3 \times 1 = 3$

② $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{4\text{س}} - 1}{5\text{س}} = \frac{4}{5} \underset{4\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{4\text{س}} - 1}{4\text{س}}$

$= \frac{4}{5} \times 1 = \frac{4}{5}$

③ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} - 1}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1 + 1 = 2$

④ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{جاس} - 1}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)$

$= 1 - 1 = \text{صفر}$

⑤ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}} - 1}{\text{جاس}}$

بفرض أن : $\text{ص} = \text{جاس}$

فى حالة $\text{س} \to$. ∴ $\text{ص} \to$.

∴ $\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}} - 1}{\text{ص}} = 1$

⑥ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{طاس}} - 1}{\text{طاس}}$

بفرض أن $\text{طاس} = \text{ص}$

فى حالة $\text{س} \to$. ∴ $\text{ص} \to$.

∴ $\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}} - 1}{\text{ص}} = 1$

⑦ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{-\text{س}} - 1}{\text{س}}$

$= - \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{-\text{س}} - 1}{-\text{س}} = -1$

⑧ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}} - 1} = \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}}$

$= \frac{2}{1} = 2$

⑨ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{طاس}} - 1}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{طاس}} - 1}{\text{طاس}} \times \frac{\text{طاس}}{\text{س}}$

بجعل $\text{ص} = \text{طاس}$ فى النهاية الأولى

$\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}} - 1}{\text{ص}} \times \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{طاس}}{\text{س}} = 1 \times 1 = 1$

⑩ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{3^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}} 3$

⑪ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{5^{\text{س}} - 1}{2^{\text{س}} - 1} = \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\frac{5^{\text{س}} - 1}{\text{س}}}{\frac{2^{\text{س}} - 1}{\text{س}}}$

$= \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} 5}{\text{لو}_{\text{هـ}} 2} = \text{لو}_{2} 5$

⑫ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}5\text{س}}{5^{\text{س}} - 1} = \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}5\text{س}}{\text{س}}}{\frac{5^{\text{س}} - 1}{\text{س}}}$

$= \frac{5}{\text{لو}_{\text{هـ}} 5} = 5 \text{ لو}_{5} \text{هـ}$

⑬ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{2^{\text{جاس}} - 1}{\text{جاس}}$

بفرض أن : $\text{ص} = \text{جاس}$

$\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \frac{2^{\text{ص}} - 1}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

③ $\underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{٦}}{\text{س} - ٦}$

بفرض أن

س − ٦ = ص منها س = ص + ٦

$\underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}+٦} - \text{هـ}^{٦}}{\text{ص}} = \underset{\text{ص} \to}{\text{نهـا}} \text{هـ}^{٦} \times \frac{(\text{هـ}^{\text{ص}} - ١)}{\text{ص}}$

$= \text{هـ}^{٦} \times ١ = \text{هـ}^{٦}$

④ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + ٤\,\text{جا}^{٢}\text{س})^{\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

بفرض أن : ص = ٤ جا^{٢} س

∴ قتا^{٢} س = $\frac{٤}{\text{ص}}$

فى حالة س ← ٠ ∴ ص ← ٠

$\underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + \text{ص})^{\frac{١}{\text{ص}}}$

$\therefore \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \left((١ + \text{ص})^{\frac{١}{\text{ص}}}\right)^{٤} = \text{هـ}^{٤}$

⑤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}} - ١}{\text{جاس}} - \frac{\text{هـ} - ١}{١} = \text{هـ} - ١$

⑥ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}} - ١}{\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}$

بفرض أن $\frac{\pi}{٢}$ − س = ص منها س = $\frac{\pi}{٢}$ − ص

∴ جاس = جاص

فى حالة س ← $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص ← ٠

$\therefore \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاص}} - ١}{\text{ص}}$

$\underset{\text{جاص} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاص}} - ١}{\text{جاص}} \times \frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$

$= ١ \times ١ = ١$

⑦ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{\text{أس}}}{\text{س}}$

$\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{أس}} (\text{هـ}^{(\text{ب} - \text{أ})\text{س}} - ١)}{\text{س}}$

$(\text{ب} - \text{أ}) \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \text{هـ}^{\text{أس}} \times$

$\underset{(\text{ب} - \text{أ})\text{س} \to}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{هـ}^{(\text{ب} - \text{أ})\text{س}} - ١}{(\text{ب} - \text{أ})\text{س}}\right)$

$\therefore (\text{ب} - \text{أ}) \times \text{هـ}^{\text{أس}} \times ١ = \text{ب} - \text{أ}$

⑧ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{جاس}}}{\text{س} - \text{جاس}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}} (\text{هـ}^{\text{س} - \text{جاس}} - ١)}{\text{س} - \text{جاس}}$

بفرض أن : ص = س − جاس

فى حالة س ← ٠ ∴ ص ← ٠

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{هـ}^{\text{ص}} - ١)}{\text{ص}}$

$= \text{هـ}^{٠} \times ١ = ١$

٦

① (هـ) ② (ب) ③ (د)

إرشادات لحل رقم ٧

① $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١)}{\text{س}} \times \frac{(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)}\right]$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})}$

$\times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٣) = ١ \times ٣ = ٣$

② $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١)}{\text{س}(\text{س} + ٣)}\right.$

$\left.\times \frac{\text{س}(\text{س} + ٥)}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٥)}\right]$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})}$

$\times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢} + ٥\text{س})}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١)}$

$\times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٥} = ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

③ $\because \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{أس}} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + ٣\text{س})} = ٢$

$\therefore \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{هـ}^{\text{أس}} - ١}{\text{أس}} \times \frac{٣\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + ٣\text{س})} \times \frac{\text{أس}}{٣\text{س}}\right]$

$= ٢$

$\therefore \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{أس}} - ١}{\text{أس}}$

$\times \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + ٣\text{س})} \times \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}}{٣} = ٢$

$\therefore ١ \times ١ \times \frac{\text{أ}}{٣} = ٢ \quad \therefore \text{أ} = ٦$

٨

① $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{١ - \text{جتا}\,٢\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}$

$- \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}$

$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

② $\underset{\text{س} \to \text{هـ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١}{\text{س} - \text{هـ}}$

بفرض لو$_{\text{هـ}}$ س − ١ = ص

∴ لو$_{\text{هـ}}$ س = ١ + ص ، س = هـ$^{١+\text{ص}}$

، عندما س ← هـ فإن ص ← ٠

$\therefore \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}}{\text{هـ}^{١+\text{ص}} - \text{هـ}} = \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \times \frac{\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{ص}} - ١}$

$= \frac{١}{\text{هـ}}$

③ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(\text{هـ}^{٢+\text{س}} - \text{هـ}^{٢})}{١ - \text{جتا}\,\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{٢}(\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}$

$= \text{هـ}^{٢}\,\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}}{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}} \times \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{٢} \times \frac{١}{٢\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}} \times ١ = ٢\,\text{هـ}^{٢}$

④ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{(\text{أ}\text{ب})^{\text{س}} - \text{أ}^{\text{س}}\,\text{ب}^{\text{س}} + ١}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}^{\text{س}}(\text{ب}^{\text{س}} - ١) - (\text{ب}^{\text{س}} - ١)}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ب}^{\text{س}} - ١)(\text{أ}^{\text{س}} - ١)}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{\text{أ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

⑤ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{١٠^{\text{س}} - ٢^{\text{س}} - ٥^{\text{س}} + ١}{\text{س}\,\text{جاس}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{٢^{\text{س}}(٥^{\text{س}} - ١) - (٥^{\text{س}} - ١)}{\text{س}\,\text{جاس}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٥^{\text{س}} - ١) \times (٢^{\text{س}} - ١)}{\text{س}\,\text{جاس}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{٥^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{٢^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٥ \times \text{لو}_{\text{هـ}}٢ \times ١$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٥ \times \text{لو}_{\text{هـ}}٢$

⑥ $\underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(٣ + \text{س}) - \text{لو}_{\text{هـ}}(٣ - \text{س})}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}٣\left(١ + \frac{١}{٣}\text{س}\right) - \text{لو}_{\text{هـ}}٣\left(١ - \frac{١}{٣}\text{س}\right)}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{لو}_{\text{هـ}}٣} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ + \frac{١}{٣}\text{س}\right) - \cancel{\text{لو}_{\text{هـ}}٣} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ + \frac{١}{٣}\text{س}\right)}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ + \frac{١}{٣}\text{س}\right)}{\text{س}}$

$- \underset{\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ + \frac{١}{٣}\text{س}\right)}{\text{س}}$

$= \frac{١}{٣}\,\underset{\frac{١}{٣}\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ + \frac{١}{٣}\text{س}\right)}{\frac{١}{٣}\text{س}}$

$+ \frac{١}{٣}\,\underset{-\frac{١}{٣}\text{س} \to}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ + \frac{١}{٣}\text{س}\right)}{-\frac{١}{٣}\text{س}}$

$= \frac{١}{٣} \times ١ + \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{٢}{٣}$

7

(٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{٣^{\text{س}} - ٩}{٢^{\text{س}} - ٤} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{٣^{٢}(٣^{\text{س}-٢} - ١)}{٢^{٢}(٢^{\text{س}-٢} - ١)}$

بفرض أن ص = س − ٢ منها س = ص + ٢

فى حالة س ← ٢ فإن ص ← ٠

$\therefore \lim\limits_{\text{ص} \to ٠} \frac{٩}{٤} \times \frac{٣^{\text{ص}} - ١}{٢^{\text{ص}} - ١}$

$= \frac{٩}{٤} \times \lim\limits_{\text{ص} \to ٠} \frac{\frac{٣^{\text{ص}} - ١}{\text{ص}}}{\frac{٢^{\text{ص}} - ١}{\text{ص}}}$

$= \frac{٩}{٤} \times \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢} = \frac{٩}{٤} \text{ لو}_{٢} ٣$

(٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\sqrt{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\sqrt{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}}}$

$= ١ \times \frac{١}{\frac{١}{٢} \times \sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

(٩) $\because \text{هـ}^{\text{س}} = \sum\limits_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}$

$= ١ + \frac{\text{س}}{١!} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} + \dots$

$= ١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{٦} + \frac{\text{س}^{٤}}{٢٤} + \dots$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١ - \text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}}{\text{س}^{٣}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{٦} + \frac{\text{س}^{٤}}{٢٤} + \dots + \left(-١ - \text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right)}{\text{س}^{٣}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{س}^{٣}}{٦} + \frac{\text{س}^{٤}}{٢٤} + \dots}{\text{س}^{٣}}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{١}{٦} + \frac{\text{س}}{٢٤} + \dots\right) = \frac{١}{٦}$

تمارين على الباب

أ

(١) ص = $\text{هـ}^{٣\text{س}}$

$\therefore$ ص' = $\text{هـ}^{٣\text{س}} \times ٣ = ٣ \text{ هـ}^{٣\text{س}}$

(٢) ص = $٧ \text{ هـ}^{\text{س}+٤}$

$\therefore$ ص' = $٧ \text{ هـ}^{\text{س}+٤} \times ١ = ٧ \text{ هـ}^{\text{س}+٤}$

(٣) ص = $\text{هـ}^{٢\text{س}+٣}$

$\therefore$ ص' = $\text{هـ}^{٢\text{س}+٣} \times ٢ = ٢ \text{ هـ}^{٢\text{س}+٣}$

(٤) ص = $\frac{١}{٢} \text{ هـ}^{٣ - ٦\text{س} - \text{س}^{٢}}$

$\therefore$ ص' = $\frac{١}{٢} \text{ هـ}^{٣ - ٦\text{س} - \text{س}^{٢}} \times (-٦ - ٢\text{س})$

$= (-\text{س} - ٣) \text{ هـ}^{٣ - ٦\text{س} - \text{س}^{٢}}$

(٥) ص = $\text{هـ}^{٣\text{س}^{٥}}$

$\therefore$ ص' = $\text{هـ}^{٣\text{س}^{٥}} \times ١٥\text{س}^{٤} = ١٥\text{س}^{٤} \text{ هـ}^{٣\text{س}^{٥}}$

(٦) ص = $\text{هـ}^{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

$\therefore$ ص' = $\text{هـ}^{\text{س}^{٢} - \text{س}} \times (٢\text{س} - ١)$

$= (٢\text{س} - ١) \text{ هـ}^{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

(٧) ص = $\frac{١}{٣} \text{ هـ}^{\text{س}} - ٥ \text{ هـ}$

$\therefore$ ص' = $\frac{١}{٣} \text{ هـ}^{\text{س}}$

(٨) ص = $\text{هـ}^{(\text{س}+١)^{٢}}$

$\therefore$ ص' = $\text{هـ}^{(\text{س}+١)^{٢}} \times ٢(\text{س} + ١)$

$= ٢(\text{س} + ١) \text{ هـ}^{(\text{س}+١)^{٢}}$

(٩) ص = $\text{س}^{٢} \text{ هـ}^{-٣}$

$\therefore$ ص' = $٢ \text{ هـ}^{-٣\text{س}}$

(١٠) ص = $\text{س}^{٢} + ٣ \text{ هـ}^{\text{س}}$

$\therefore$ ص' = $٢\text{س} + ٣ \text{ هـ}^{\text{س}}$

(١١) ص = $٢ \text{ هـ}^{\text{س}} + \text{جتا } ٢\text{س}$

$\therefore$ ص' = $٢ \text{ هـ}^{\text{س}} - ٢ \text{ جا } ٢\text{س}$

(١٢) ص = $٢\text{س} + \text{هـ}^{٦\text{س}}$

$\therefore$ ص' = $٢ + \text{هـ}^{٦\text{س}} \times ٦ = ٢ + ٦ \text{ هـ}^{٦\text{س}}$

(١٣) ص = $\text{س}^{٢} + \text{ظا س} + \text{هـ}^{٥\text{س}+١}$

$\therefore$ ص' = $٣\text{س}^{٢} + \text{قا}^{٢}\text{س} + ٥ \text{ هـ}^{٥\text{س}+١}$

(١٤) ص = $\text{هـ}^{٠} + \text{هـ}^{٥\text{س}} + \text{هـ}^{٥\text{س}^{٢}}$

$\therefore$ ص' = $٠ + ٥ \text{ هـ}^{٥\text{س}} + ١٠\text{س هـ}^{٥\text{س}^{٢}}$

$= ٥ \text{ هـ}^{٥\text{س}} + ١٠\text{س هـ}^{٥\text{س}^{٢}}$

ب

(١) ص = $٣^{\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} ٣$

(٢) ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{٢}$

(٣) ص = $٥ \times ٦^{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥ \times ٦^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} ٦$

(٤) ص = $٥^{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥^{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}} \times (٣\text{س}^{٢} + ٢) \text{ لو}_{\text{هـ}} ٥$

(٥) ص = $٧^{\text{س}} + \text{س}^{٧}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} ٧ + ٧\text{س}^{٦}$

(٦) ص = $٣^{٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣^{٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢} \times (٦\text{س} - ٥) \text{ لو}_{\text{هـ}} ٣$

(٧) ص = $٣ \text{ هـ}^{\text{قاس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ \text{ هـ}^{\text{قاس}} \times \text{قاس ظاس}$

(٨) ص = $\text{هـ}^{\text{جتاس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{جتاس}} \times -\text{جاس} = -\text{جاس هـ}^{\text{جتاس}}$

(٩) ص = $\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{٢\sqrt{\text{س}}}$

(١٠) ص = $(٣^{\text{س}-١})^{٢}$

$\therefore$ ص = $٣^{٢\text{س}-٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣^{٢\text{س}-٢} \times ٢ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

$= ٢ \times ٣^{٢\text{س}-٢} \text{ لو}_{\text{هـ}} ٣$

(١١) ص = $\text{هـ}^{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{جا}\sqrt{\text{س}}} \times \text{جتا}\sqrt{\text{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$= \frac{\text{جتا}\sqrt{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{س}}} \times \text{هـ}^{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}$

(١٢) ص = $\text{هـ}^{\sqrt{\text{جاس}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{جاس}}} \times \frac{-\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢\sqrt{\text{جاس}}}$

$= \frac{-\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢\sqrt{\text{جاس}}} \times \text{هـ}^{\sqrt{\text{جاس}}}$

ج

(١) ص = $\text{س هـ}^{٢\text{س}}$

$\therefore$ ص' = $\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{س هـ}^{٢\text{س}} \times ٢$

$= \text{هـ}^{٢\text{س}}(١ + ٢\text{س})$

(٢) ص = $\text{س}^{٢} \text{ هـ}^{\text{س}}$

$\therefore$ ص' = $٢\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{٢} \text{ هـ}^{\text{س}}$

$= \text{س هـ}^{\text{س}}(٢ + \text{س})$

(٣) ص = $(\text{س}^{٢} + ٣) \text{ هـ}^{-٢\text{س}}$

$\therefore$ ص' = $٢\text{س هـ}^{-٢\text{س}} + (\text{س}^{٢} + ٣) \text{ هـ}^{-٢\text{س}} \times -٢$

$= \text{هـ}^{-٢\text{س}}(٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢} - ٩)$

(٤) ص = $٢\text{س}^{٤} \text{ هـ}^{١+\text{س}}$

$\therefore$ ص' = $٨\text{س}^{٣} \text{ هـ}^{١+\text{س}} + ٢\text{س}^{٤} \text{ هـ}^{١+\text{س}}$

$= ٢\text{س}^{٣} \text{ هـ}^{١+\text{س}}(٤ + \text{س})$

(٥) ص = $(٣\text{س} - ٥) \text{ هـ}^{\text{س}^{٢}}$

$\therefore$ ص' = $٣ \text{ هـ}^{\text{س}^{٢}} + (٣\text{س} - ٥) \text{ هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}$

$= \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}(٣ + ٦\text{س}^{٢} - ١٠\text{س})$

⑥ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا س}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا س} + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا س}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\ (\text{جا س} + \text{جتا س})$

⑦ $\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{قا ٣ س}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{2\text{س}} \times 2 \times \text{قا ٣ س}$

$+ \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{قا ٣ س ظا ٣ س} \times 3$

$= \text{قا ٣ س} \cdot \text{هـ}^{2\text{س}}\ (2 + 3\ \text{ظا ٣ س})$

⑧ $\text{ص} = \text{س} \times 5^{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = 5^{\text{س}} + \text{س} \times 5^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} 5$

$= 5^{\text{س}}\ (1 + \text{س لو}_{\text{هـ}} 5)$

⑨ $\text{ص} = 2^{\text{س}}\ (\text{س} + 1)$

$\therefore \text{ص}' = 2^{\text{س}}\ (\text{س} + 1)\ \text{لو}_{\text{هـ}} 2 + 2^{\text{س}} \times 1$

$= 2^{\text{س}}\ (\text{س لو}_{\text{هـ}} 2 + \text{لو}_{\text{هـ}} 2 + 1)$

⑩ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\ \text{هـ}^{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\ \left(\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}}\right)$

⑪ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times 2^{-5\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس} \times 2^{-5\text{س}}$

$+ \text{هـ}^{\text{جاس}} \times 2^{-5\text{س}} \times -5 \times \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} \times 2^{-5\text{س}}\ (\text{جتاس} - 5\ \text{لو}_{\text{هـ}} 2)$

⑫ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{طاس}} \times 5^{7\text{س}^2}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{طاس}} \times \text{قا}^2\text{س} \times 5^{7\text{س}^2} + \text{هـ}^{\text{طاس}}$

$\times 5^{7\text{س}^2} \times 14\ \text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}} 5$

$= \text{هـ}^{\text{طاس}} \times 5^{7\text{س}^2}\ (\text{قا}^2\text{س} + 14\ \text{س لو}_{\text{هـ}} 5)$

⑬ $\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س}} \times \text{أ}^{\text{س}^2 - 5}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{2\text{س}} \times 2 \times \text{أ}^{\text{س}^2 - 5} + \text{هـ}^{2\text{س}}$

$\times \text{أ}^{\text{س}^2 - 5} \times 2\ \text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}$

$= 2\ \text{هـ}^{2\text{س}} \times \text{أ}^{\text{س}^2 - 5}\ (1 + \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{أ})$

⑭ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جا}^2\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جا}^2\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times 2\ \text{جاس جتاس}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\ (\text{جاس} + 2\ \text{جتاس})$

٤

① $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{2\text{س}}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{هـ}^{2\text{س}} \times 1 - \text{س} \times \text{هـ}^{2\text{س}} \times 2}{\text{هـ}^{4\text{س}}}$

$= \text{هـ}^{-2\text{س}}\ (1 - 2\ \text{س})$

② $\text{ص} = \frac{2\ \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + 1)}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س} + 1) \times 2\ \text{هـ}^{\text{س}} - 2\ \text{هـ}^{\text{س}}\ (1)}{(\text{س} + 1)^2}$

$= \frac{2\ \text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + 1)^2}$

③ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}^2}}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{س هـ}^{\text{س}^2} \times 2\ \text{س} - \text{هـ}^{\text{س}^2} \times 1}{\text{س}^2}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}^2}\ (2\ \text{س}^2 - 1)}{\text{س}^2}$

④ $\text{ص} = \frac{2^{\text{س}}}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{س} \times 2^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} 2 - 2^{\text{س}} \times 1}{\text{س}^2}$

$= \frac{2^{\text{س}}\ (\text{س لو}_{\text{هـ}} 2 - 1)}{\text{س}^2}$

⑤ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{2\text{س}+3}}{\text{س}^2 + 3}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س}^2 + 3)\ \text{هـ}^{2\text{س}+3} \times 2 - \text{هـ}^{2\text{س}+3} \times 2\text{س}}{(\text{س}^2 + 3)^2}$

$= \frac{2\ \text{هـ}^{2\text{س}+3}\ (\text{س}^2 + 3 - \text{س})}{(\text{س}^2 + 3)^2}$

⑥ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{طاس}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{طاس هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{قا}^2\text{س}}{(\text{طاس})^2}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\ (\text{طاس} - \text{قا}^2\text{س})}{\text{طا}^2\text{س}}$

⑦ $\text{ص} = \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا ٣ س} \times 3 - \text{جا ٣ س} \times \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^2}$

$= \text{هـ}^{-\text{س}}\ (3\ \text{جتا ٣ س} - \text{جا ٣ س})$

⑧ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}}}{\text{جتاس}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس} - \text{هـ}^{\text{جاس}}\ (-\text{جاس})}{(\text{جتاس})^2}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{جاس}}\ (\text{جتا}^2\text{س} + \text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}}$

⑨ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{-2\text{س}}}{\sqrt{\text{س} + 1}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\sqrt{\text{س}+1} \times \text{هـ}^{-2\text{س}} \times -2 - \text{هـ}^{-2\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}}{\left(\sqrt{\text{س}+1}\right)^2}$

$= \frac{-4\ (\text{س} + 1)\ \text{هـ}^{-2\text{س}} - \text{هـ}^{-2\text{س}}}{2\ (\text{س} + 1)\sqrt{\text{س}+1}}$

⑩ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + 1}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{هـ}^{\text{س}} + 1)\ \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + 1)^2}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + 1)^2}$

⑪ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1 + \text{جتاس}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(1 + \text{جتاس})\ \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}\ (-\text{جاس})}{(1 + \text{جتاس})^2}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\ (1 + \text{جتاس} + \text{جاس})}{(1 + \text{جتاس})^2}$

⑫ $\text{ص} = \frac{3^{\text{س}}}{3^{\text{س}} + 1}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(3^{\text{س}} + 1)(3^{\text{س}})\ \text{لو}_{\text{هـ}} 3 - 3^{\text{س}}\ (3^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} 3)}{(3^{\text{س}} + 1)^2}$

$= \frac{3^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} 3}{(3^{\text{س}} + 1)^2}$

⑬ $\text{ص} = (\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{-2\text{س}})^5$

$\therefore \text{ص}' = 5\ (\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{-2\text{س}})^4\ (2\ \text{هـ}^{2\text{س}} + 2\ \text{هـ}^{-2\text{س}})$

⑭ $\text{ص} = (\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}})^2$

$\therefore \text{ص}' = 2\ (\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}})^2 \times (2\ \text{هـ}^{2\text{س}} - 2\ \text{هـ}^{-2\text{س}})$

$= 6\ (\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{-2\text{س}})\ (\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}})^2$

٥

① $\text{ص} = 5\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ $\quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{5}{\text{س}}$

② $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} 7\ \text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{7\ \text{س}} \times 7 = \frac{1}{\text{س}}$

③ $\text{ص} = 3\ \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + 4)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{3}{\text{س} + 4}$

④ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (2\ \text{س} - 7)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\ \text{س} - 7} \times 2 = \frac{2}{2\ \text{س} - 7}$

⑤ $\text{ص} = 3\ \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3 + \frac{1}{\text{س}}$

⑥ $\text{ص} = 5 - 3\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-3}{\text{س}}$

⑦ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{1}{2}\text{س}^2 + \text{س}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} + 1}{\frac{1}{2}\text{س}^2 + \text{س}}$

⑧ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (2\ \text{س}^2 + 9)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{6\ \text{س}^2}{2\ \text{س}^2 + 9}$

⑨ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{1}{\text{س}^2 + 9}\right) = -\ \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + 9)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-1}{\text{س}^2 + 9} \times 2\ \text{س} = \frac{-2\ \text{س}}{\text{س}^2 + 9}$

⑩ $\text{ص} = \text{لو}_{3} \text{س}$ $\quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{لو}_{3} \text{هـ}$

⑪ $\text{ص} = \text{لو}_{5} (3\ \text{س} - 2)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{3}{3\ \text{س} - 2} \times \text{لو}_{5} \text{هـ}$

(١) $\text{ص} = \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١$

(٢) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{س}}$

$= ٢\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}$

$= \text{س}\ (٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١)$

(٣) $\text{ص} = \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢} + \text{س} \times \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢} + ٢$

(٤) $\text{ص} = (٢\text{س}^{٥} - ٣)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٠\text{س}^{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + (٢\text{س}^{٥} - ٣) \times \frac{١}{\text{س}}$

$= ١٠\text{س}^{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢\text{س}^{٤} - \frac{٣}{\text{س}}$

(٥) $\text{ص} = (٣ + \text{س})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + (٣ + \text{س}) \times \frac{١}{\text{س}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{٣}{\text{س}} + ١$

(٦) $\text{ص} = ٢\text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} \times \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}}$

$= ٤\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} + ٦\text{س}$

(٧) $\text{ص} = ٢\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}}$

$= ٢ + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}$

$= ٢ + \text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)$

(٨) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ١)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ١) + \text{هـ}^{\text{س}}\ \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + ١) + \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}\right)$

(١٢) $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٥\ \text{لو}_{٢}\frac{\text{س}}{٥}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{هـ}^{٣\text{س}} - \frac{٥ \times \frac{١}{٥}}{\frac{\text{س}}{٥}}\ \text{لو}_{٢}\text{هـ}$

$= ٦\text{هـ}^{٣\text{س}} - \frac{٥\ \text{لو}_{٢}\text{هـ}}{\text{س}}$

(١٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢} - \text{هـ}^{\frac{١}{٤}\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\frac{١}{٤}\text{س}}$

$= \frac{٢}{\text{س}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\frac{١}{٤}\text{س}}$

(١٤) $\text{ص} = \text{لو}\ (٢\text{س} - ٣)^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\ (٢\text{س} - ٣) \times ٢}{(٢\text{س} - ٣)^{٢}}\ \text{لو}\text{هـ}$

$= \frac{٤\ \text{لو}\text{هـ}}{(٢\text{س} - ٣)}$

(١٥) $\text{ص} = ٣\ \text{جتاس} - \text{هـ}^{\text{س}} - \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣\ \text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}} - \frac{١}{٢\text{س}}$

(١٦) $\text{ص} = ٣^{\text{س}} + ٣\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢٠٢١$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}٣ + \frac{٣}{\text{س}}$

(١٧) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ٧} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + ٧)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س} + ٧} = \frac{٢}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س} + ٧}$

(١٨) $\text{ص} = \text{لو}\left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}}\right) = \text{لو}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \text{لو}\ \text{س}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}\ \text{لو}\text{هـ} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}\ \text{لو}\text{هـ}$

$= \left(٢\text{س} - \frac{٢}{\text{س}}\right)\ \text{لو}\text{هـ}$

---

(٩) $\text{ص} = ٥ + ٤\ \text{جتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٤\ \text{جاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٤\ \text{جتاس} \times \frac{١}{\text{س}}$

$= -٤\ \text{جاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{٤\ \text{جتاس}}{\text{س}}$

(١٠) $\text{ص} = (\text{لو}\ \text{س})^{٣} + \sqrt{\text{س}}\ \text{لو}\ \text{س}^{٤}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\ (\text{لو}\ \text{س})^{٢} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}_{١٠}\text{هـ}$

$+ \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\ \text{لو}\ \text{س}^{٤} + \sqrt{\text{س}} \times \frac{٤\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤}}\ \text{لو}_{١٠}\text{هـ}$

$= \frac{٣}{\text{س}}\ (\text{لو}\ \text{س})^{٢}\ \text{لو}_{١٠}\text{هـ}$

$+ \frac{\text{لو}\ \text{س}^{٤}}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{لو}_{١٠}\text{هـ}$

(١١) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ (١) - \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}$

$= \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}$

(١٢) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(٥\ \text{س})}{\text{س} + ١}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + ١)\ \frac{٥}{٥\ \text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\ ٥\ \text{س}\ (١)}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

$= \frac{\text{س} + ١ - \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ ٥\ \text{س}}{\text{س}\ (\text{س} + ١)^{٢}}$

(١٣) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{جاس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جاس} \times \frac{١}{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{جتاس}}{(\text{جاس})^{٢}}$

$= \frac{\text{جاس} - \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{جتاس}}{\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}}$

(١٤) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{ظاس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ظاس}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}$

$= \frac{\text{ظاس} - \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{س}\ \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

(١٥) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{لو}\ \text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو}\ \text{س} \times \text{هـ}^{٣\text{س}} \times ٣ - \text{هـ}^{٣\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}\text{هـ}}{(\text{لو}\ \text{س})^{٢}}$

$= \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}\left(٣\ \text{لو}\ \text{س} - \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}\text{هـ}\right)}{(\text{لو}\ \text{س})^{٢}}$

(١٦) $\text{ص} = \frac{\text{لو}\ \text{س}}{١ + \text{لو}\ \text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١ + \text{لو}\ \text{س}) \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}\text{هـ} - \text{لو}\ \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{لو}\text{هـ}}{(١ + \text{لو}\ \text{س})^{٢}}$

$= \frac{\text{لو}\text{هـ}}{\text{س}\ (١ + \text{لو}\ \text{س})^{٢}}$

(١٧) $\text{ص} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) - ١}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + ١}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١) \times \frac{١}{\text{س}} - (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١) \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١)^{٢}}$

$= \frac{٢}{\text{س}\ (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١)^{٢}}$

(١٨) $\text{ص} = \frac{١ - ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \left(\frac{-٢}{\text{س}}\right) - (١ - ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}$

$= \frac{-٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١ + ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}\ (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}} = \frac{-١}{\text{س}\ (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}$

٥

(١) $\text{س} = \text{هـ}^{٢\text{ن}}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}$

، $\text{ص} = \text{ن}^{٣}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٣\,\text{ن}^{٢}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{ن}^{٢} \div ٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}} = \frac{٣\,\text{ن}^{٢}}{٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}}$

، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{٣\,\text{ن}^{٢}}{٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}}\right)$

$= \left(\frac{٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}(٦\,\text{ن}) - ٣\,\text{ن}^{٢} \times ٤\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}}{٤\,\text{هـ}^{٤\text{ن}}}\right) \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}}$

$= \frac{١٢\,\text{ن}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}(١ - \text{ن})}{٤\,\text{هـ}^{٤\text{ن}}} \times \frac{١}{٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}}$

$= \frac{٣}{٢}\,\text{ن}\,\text{هـ}^{-٤\text{ن}}(١ - \text{ن})$

(٢) $\text{س} = \text{هـ}^{٢\text{ن}}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}$

، $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{ن}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٣\,\text{هـ}^{٣\text{ن}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{هـ}^{٣\text{ن}} \div ٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}} = \frac{٣}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ن}}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{٣}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ن}}\right)$

$= \frac{٣}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ن}} \times \frac{١}{٢\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}}$

$= \frac{٣}{٤}\,\text{هـ}^{-\text{ن}}$

(٣) $\text{س} = ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ن}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{٦}{\text{ن}}$

، $\text{ص} = \text{ن}^{٢}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٢\,\text{ن}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{ن} \div \frac{٦}{\text{ن}} = \frac{١}{٣}\,\text{ن}^{٢}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{١}{٣}\,\text{ن}^{٢}\right) = \frac{٢}{٣}\,\text{ن} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}}$

$= \frac{٢}{٣}\,\text{ن} \times \frac{\text{ن}}{٦}$

$= \frac{١}{٩}\,\text{ن}^{٢}$

٦

(١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -\,\text{س}^{-٢}$ ∴ $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٢\,\text{س}^{-٣}$

(٢) $\text{ص} = \text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٢\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٦\,\text{س} + ٤\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٦ + ٨\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

(٣) $\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}\,\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}\,\text{س} + \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

$= \text{لو}\,\text{س} + \text{لو}\,\text{هـ}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{١}{\text{س}} \times \text{لو}\,\text{هـ} + ٠ = \frac{\text{لو}\,\text{هـ}}{\text{س}} = \text{س}^{-١}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = -\,\text{س}^{-٢}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

٧

(١) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \frac{١}{٤}} = ١ - ٢\,\text{هـ}^{\frac{١}{٤}}$

(٢) $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{س} - ٣ \times \frac{١}{\text{س}}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ٢}$

$= ٤ - ٣ \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$

(٣) $\text{ص} = \frac{١}{٤}\,\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٢ \times \frac{١}{\text{س}}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ} - ٤$

(٤) $\text{ص} = \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{س}\left(-\,\text{هـ}^{-\text{س}}\right)$

$= \text{هـ}^{-\text{س}}(١ - \text{س})$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١ ، \frac{١}{\text{هـ}})} =$ صفر

(٥) $\text{ص} = (٢\,\text{س} + ٣)\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\,(٢\,\text{س} + ٣)\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

$= ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}}(١ + ٢\,\text{س} + ٣)$

$= ٤\,(\text{س} + ٢)\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٠ ، ٢)} = ٨$

(٦) $\text{ص} = \text{لو}_{٢}\,٥\,\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٥\,\text{س}} \times ٥\,\text{لو}_{٢}\,\text{هـ} = \frac{\text{لو}_{٢}\,\text{هـ}}{\text{س}}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ٢} = \frac{\text{لو}_{٢}\,\text{هـ}}{٢}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{٢}\,\text{هـ}$

(٧) $\text{ص} = ٤\,\text{لو}\,(٣\,\text{س} + ١)$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ \times \frac{١}{٣\,\text{س} + ١} \times ٣\,\text{لو}\,\text{هـ}$

$= \frac{١٢}{٣\,\text{س} + ١}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ١}$

$= \frac{١٢}{٣ \times ١ + ١}\,\text{لو}\,\text{هـ} = ٣\,\text{لو}\,\text{هـ}$

(٨) $\text{ص} = \text{لو}_{٢}\,(٢\,\text{س}^{٢} - ٣)^{٤}$

$= ٤\,\text{لو}_{٢}\,(٢\,\text{س}^{٢} - ٣)$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ \times \frac{١}{٢\,\text{س}^{٢} - ٣} \times ٤\,\text{س}\,\text{لو}_{٢}\,\text{هـ}$

$= \frac{١٦\,\text{س}}{٢\,\text{س}^{٢} - ٣}\,\text{لو}_{٢}\,\text{هـ}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ١} = -\,١٦\,\text{لو}_{٢}\,\text{هـ}$

(٩) $\text{ص} = ٣\,(\text{لو}\,\text{س})^{٢}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\,\text{لو}\,\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

$= \frac{٦}{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{س}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ٢} = ٢\,\text{لو}\,٣\,\text{لو}\,\text{هـ}$

٨

(١) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

$= \text{س}^{٢}\,(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + ١)$

إذا كان المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

∴ $\text{س}^{٢}\,(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + ١) = ٠$

فإن $\text{س}^{٢} = ٠$ ، منها $\text{س} = ٠$ (مرفوض)

أو $٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + ١ = ٠$ ، منها $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \frac{-١}{٢}$

∴ $\text{س} = \text{هـ}^{\frac{-١}{٢}}$ ∴ قيم س هى $\text{هـ}^{\frac{-١}{٢}}$

(٢) $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\,\text{س}^{-٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} \times \frac{٢\,\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{-٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢} + ٢}{\text{س}^{٣}}$

، ∵ المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ ∴ $-٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢} + ٢ = ٠$

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢} = ١$ ∴ $\text{س}^{٢} = \text{هـ}$

∴ $\text{س} = \sqrt{\text{هـ}}$ (والسالب مرفوض)

(٣) $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٨١\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{س}^{٢} - \frac{٨١}{\text{س}} = \frac{٣\,(\text{س}^{٣} - ٢٧)}{\text{س}}$

، ∵ المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ ∴ $\text{س}^{٣} - ٢٧ = ٠$

∴ $\text{س}^{٣} = ٢٧$ ∴ $\text{س} = ٣$

④ $ص = ٣ - \frac{س^٢}{٤} + لو_هـ \frac{س}{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٢}س + \frac{٢}{س} \times \frac{١}{٢}$

$= -\frac{١}{٢}س + \frac{١}{س} = \frac{-س^٢ + ٢}{٢س}$

∵ المماس يوازى محور السينات

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore -س^٢ + ٢ = ٠$

$\therefore س = \sqrt{٢}$ (والسالب مرفوض)

١١

$ص = س هـ^{٢س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = هـ^{٢س} + ٢س هـ^{٢س}$

$= هـ^{٢س}(١ + ٢س)$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{١}{٢}، هـ)}$

$= هـ(١ + ٢ \times \frac{١}{٢}) = ٢هـ$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - \frac{١}{٢}هـ}{س - \frac{١}{٢}} = ٢هـ$

منها $٤هـ س - ٢ص - هـ = ٠$

١٢

$ص = هـ^{٢س} جتاس$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢هـ^{٢س} جتاس + هـ^{٢س} \times -جاس$

$= هـ^{٢س}(٢جتاس - جاس)$

∴ ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=٠} = ٢$

، عند $س = ٠$ فإن $ص = ١$

∴ النقطة هى $(٠ ، ١)$

∴ معادله المماس $= \frac{ص - ١}{س - ٠} = ٢$

$\therefore ٢س - ص + ١ = ٠$

١٣

$ص = ٢^{س} + ٢^{-س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢^{س} لو_هـ ٢ - ٢^{-س} لو_هـ ٢$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، \frac{١٥}{٤})} = \frac{١٥}{٤} لو_هـ ٢$

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - \frac{١٥}{٤}}{س - ٢} = \frac{١٥}{٤} لو_هـ ٢$

أى أن $١٥ س لو_هـ ٢ - ٤ص - ٣٠ لو_هـ ٢ + ١٧ = ٠$

١٤

$ص = \frac{هـ^{\frac{س}{٢}}}{س} = س^{-١} هـ^{\frac{س}{٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-هـ^{\frac{س}{٢}}}{س^٢} + \frac{\frac{١}{٢}هـ^{\frac{س}{٢}}}{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، \frac{١}{٢}هـ)} = \frac{-هـ}{٩} + \frac{هـ}{٩} = ٠$

معادلة المماس : $ص = \frac{هـ}{٢}$

١٥

$ص = ٣هـ^{س}$ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣هـ^{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=-١} = ٣هـ^{-١} = \frac{٣}{هـ}$

∴ ميل العمودى $= \frac{-هـ}{٣}$

، عند $س = -١$ فإن $ص = \frac{٣}{هـ}$

∴ النقطة هى $(-١ ، \frac{٣}{هـ})$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - \frac{٣}{هـ}}{س + ١} = \frac{-هـ}{٣}$

ومنها $هـ^٢ س + ٣هـ ص + (هـ^٢ - ٩) = ٠$

١٦

$ص = س^٢ - ١٨ لو_هـ س$

، عند $س = ٢$ فإن $ص = ٨ - ١٨ لو_هـ ٢$

، $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ - \frac{١٨}{س} = \frac{٣س^٣ - ١٨}{س}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=٢} = ٣$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٨ + ١٨ لو_هـ ٢}{س - ٢} = \frac{٣}{١}$

$\therefore ٣س - ص - ١٨ لو_هـ ٢ + ٢ = ٠$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٨ + ١٨ لو_هـ ٢}{س - ٢} = \frac{-١}{٣}$

$س + ٣ص + ٥٤ لو_هـ ٢ - ٢٦ = ٠$

١٧

$ص = لو_هـ (٢ - \sqrt{٢} جتاس)$

، عند $س = \frac{\pi}{٤}$ فإن $ص = ٠$

، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\sqrt{٢} جاس}{٢ - \sqrt{٢} جتاس}$

∴ ميل المماس $= \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=\frac{\pi}{٤}} = ١$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ٠}{س - \frac{\pi}{٤}} = ١$

منها $س - ص - \frac{\pi}{٤} = ٠$

١٨

$\frac{ءس}{ءن} = هـ^{ن}$ ، $\frac{ءص}{ءن} = هـ^{ن} + ٢هـ^{٢ن}$

عند $س = ١$ تكون $ن = ٠$ ، $ص = ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = (هـ^{ن} + ٢هـ^{٢ن}) \div هـ^{ن}$

$= ١ + ٢هـ^{ن}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=١} = ١ + ٢هـ^{٠} = ٣$

ميل المماس = ٣

∴ ميل العمودى $= \frac{-١}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٣}$

$\therefore س + ٣ص - ٧ = ٠$

حل آخر :

$س = هـ^{ن}$

$\therefore ص = س + س^٢$

عند $س = ١$ $\therefore ص = ٢$

، $\frac{ءص}{ءس} = ١ + ٢س$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=١} = ١ + ٢ = ٣$

ميل العمودى $= \frac{-١}{٣}$ عند النقطة $(١ ، ٢)$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٣}$

$\therefore س + ٣ص - ٧ = ٠$

١٩

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (أ)	⑦ (د)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (د)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (د)

٢٠

بفرض $ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^ن}{\lfloor ن}$

$= ١ + \frac{س}{١} + \frac{س^٢}{\lfloor ٢} + \frac{س^٣}{\lfloor ٣} + ...$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٠ + ١ + \frac{س}{\lfloor ١} + \frac{س^٢}{\lfloor ٢} + \frac{س^٣}{\lfloor ٣} + ...$

$= ص$

$\therefore \frac{ء}{ءس}(هـ^{س}) = هـ^{س}$

٢١

$ص = س^٢ لو_هـ \frac{س}{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢س لو_هـ \frac{س}{٢} + س^٢ \times \frac{٢}{س} \times \frac{١}{٢}$

$= ٢س لو_هـ \frac{س}{٢} + س$

، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ لو_هـ \frac{س}{٢} + ٢س \times \frac{١}{س} + ١$

$= ٢ لو_هـ \frac{س}{٢} + ٣$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ \times \frac{١}{س} + ٠ = \frac{٢}{س}$

$\therefore \left(\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right)_{س=١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

٢٦

$ص = لو_{هـ}(١ + هـ^{س})$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}$

، $\because هـ^{(لو_{هـ}(١ + هـ^{س}))} \times \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}} = ٦$

$\therefore (١ + هـ^{س}) \times \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}} = ٦$

$\therefore هـ^{س} = ٦$ $\therefore س = لو_{هـ} ٦$

٢٧

$س = ص^{ص} \times هـ^{\sqrt{ص}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ص

$\therefore \frac{ءس}{ءص} = ٢ ص هـ^{\sqrt{ص}} + ص^{ص} هـ^{\sqrt{ص}} \times \frac{١}{٢\sqrt{ص}}$

$= ٢ ص هـ^{\sqrt{ص}} + \frac{١}{٢} ص \sqrt{ص} هـ^{\sqrt{ص}}$

$= \frac{١}{٢} ص هـ^{\sqrt{ص}} (٤ + \sqrt{ص})$

٢٨

$س = ص^{ص}$ لو$_{هـ}$ ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ١ = (٢ ص لو_{هـ} ص + ص^{ص} \times \frac{١}{ص}) \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢ ص لو_{هـ} ص + ص}$

٢٩

$ص = لو_{هـ}(قاس - ظاس)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{قاس ظاس + ظا^٢ س}{قاس - ظاس}$

$= \frac{ظاس (قاس + ظاس)}{قاس - ظاس} = قاس$

٣٠

$ص = لو_{هـ}\left(ظا\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)\right)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{قا^٢\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)}{ظا\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} ظتا\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right) قا^٢\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{جتا\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)}{جا\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)} \times \frac{١}{جتا^٢\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)}$

$= \frac{١}{٢ جا\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right) جتا\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)}$

$= \frac{١}{جا٢\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)}$

$= \frac{١}{جا\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)} = \frac{١}{جتاس} = قاس$

٣١

$ص = لو_{هـ} ظاس$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{قا^٢ س}{ظاس} = \frac{١}{جتا^٢ س} \times \frac{جتاس}{جاس}$

$= \frac{١}{جاس جتاس}$

$= \frac{١}{\frac{١}{٢} جا٢س}$

$= ٢ قتا٢س$

٣٢

$ص = لو_{هـ}(\sqrt{قاس})$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\sqrt{قاس}} \times \frac{قاس ظاس}{٢\sqrt{قاس}} = \frac{١}{٢} ظاس$

٣٣

$ص = لو_{هـ}\left(س + \sqrt{س^٢ + ١^٢}\right)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢ + ١^٢}}}{س + \sqrt{س^٢ + ١^٢}}$

$= \frac{\left(\sqrt{س^٢ + ١^٢} + س\right)}{\left(س + \sqrt{س^٢ + ١^٢}\right)\sqrt{س^٢ + ١^٢}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١^٢}}$

٣٤

$ص = هـ^{٢س} جا٢س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢ هـ^{٢س} جتا٢س + ٢ هـ^{٢س} جا٢س$

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٤ هـ^{٢س} جتا٢س - ٤ هـ^{٢س} جا٢س$

$+ ٤ هـ^{٢س} جا٢س + ٤ هـ^{٢س} جتا٢س$

$= ٨ هـ^{٢س} جتا٢س$

، $\because هـ^{٢س} = \frac{ص}{جا٢س}$

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٨ \times \frac{ص}{جا٢س} \times جتا٢س$

$= ٨ ص ظتا٢س$

٣٥

$ص = هـ^{٣س} + س^٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣ هـ^{٣س} + ٢س$

، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٩ هـ^{٣س} + ٢$

، $\because هـ^{٣س} = ص - س^٢$

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٩ (ص - س^٢) + ٢$

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} - ٢ = ٩ (ص - س^٢)$

٣٦

$ص = ١ هـ^{س^٢ + ١}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢ ١ س هـ^{س^٢ + ١}$

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ ١ هـ^{س^٢ + ١} + ٤ ١ س^٢ هـ^{س^٢ + ١}$

$= ٢ ١ هـ^{س^٢ + ١} (١ + ٢س^٢)$

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٤ ١ س هـ^{س^٢ + ١} (١ + ٢س^٢)$

$+ ٨ ١ س هـ^{س^٢ + ١}$

$= ٤ ١ س هـ^{س^٢ + ١} (١ + ٢س^٢ + ٢)$

$= ٤ س ص (٣ + ٢س^٢)$

٣٧

$ص = هـ^{س} \sqrt{س}$

$\therefore ص = ١ هـ^{س} \times \frac{س}{\sqrt{س}} = \frac{س}{\sqrt{س}} هـ^{س}$

$\therefore ص' = \frac{٢ ١ س}{\sqrt{س}} هـ^{س} + \frac{س}{\sqrt{س}} ١ هـ^{س} \times هـ^{س} \times \frac{س}{\sqrt{س}}$

$= \frac{٢ ١ س}{\sqrt{س}} هـ^{س} + \frac{١ س^٢}{\sqrt{س}} هـ^{٢س}$

الطرف الأيمن

$= س (١ هـ^{س}) \times \left(\frac{٢ ١ س}{\sqrt{س}} هـ^{س} + \frac{١ س^٢}{\sqrt{س}} هـ^{٢س}\right)$

$+ ٢ \times ١ هـ^{س} \times \frac{س}{\sqrt{س}} ١ هـ^{س} - س \left(\frac{س}{\sqrt{س}} \times هـ^{٢س}\right)$

$= \frac{٢ ١^٢ س}{\sqrt{س}} هـ^{٢س} + \frac{١^٢ س^٢ هـ^{٢س}}{\sqrt{س}} - \frac{٢ ١^٢ س هـ^{٢س}}{\sqrt{س}}$

$- \frac{١^٢ س^٢ هـ^{٢س}}{\sqrt{س}} =$ صفر = الطرف الأيسر

حل آخر

$\because ص' = ١ هـ^{س} \times \frac{س}{\sqrt{س}} = \frac{س ص}{\sqrt{س}}$

$\therefore \sqrt{س} ص' = س ص$ ، وبالاشتقاق بالنسبة لـ س ،

$\therefore \sqrt{س} ص'' + \frac{١}{٢} س ص' = س ص'$

وبالتعويض عن $ص' = \frac{س ص'}{ص}$ ،

$\therefore \sqrt{س} ص'' + \frac{١}{٢} س ص' = \frac{س ص'^٢}{ص}$

(بالضرب × $\frac{ص}{س}$)

$\therefore س ص ص'' + ٢ ص ص' = س ص'^٢$

$\therefore س ص ص'' + ٢ ص ص' - س ص'^٢ = ٠$

٣٨

$ص = \sqrt{س^٢ - ١}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس (هـ)

$\therefore لو_{هـ} ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ}(س^٢ + ١) - \frac{١}{٢} لو_{هـ}(س^٢ - ١)$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢س}{س^٢ + ١} - \frac{١}{٢} \times \frac{٢س}{س^٢ - ١}$

[illegible]

$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س}(\text{س}-١) - \text{س}(\text{س}+١)}{\text{س}^{٢}}$

$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

$(\text{س}^{٢} - ١)\,\text{ص}' = -٢\text{س}\,\text{ص}$.

٣٧

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \sqrt{\frac{١+\text{س}}{١-\text{س}}}$

نأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١+\text{س}}{١-\text{س}}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{١}{\text{ص}} \times \text{ص}' = ١ + \frac{١}{٢} \times \frac{١-\text{س}}{١+\text{س}} \times \frac{(١-\text{س})(١) - (١+\text{س})(-١)}{(١-\text{س})^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ١ + \frac{١}{١-\text{س}^{٢}}$ بالضرب × ص $(١-\text{س}^{٢})$

$\therefore (١-\text{س}^{٢})\,\text{ص}' = -\text{ص} + \text{س}^{٢}\text{ص} + \text{ص}$

$= \text{س}^{٢}\text{ص}$

٣٧

بفرض أن $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٩ + \text{س}^{٢})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}^{٢} \times \frac{١}{٩+\text{س}^{٢}}$

بفرض أن $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ٣$

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}^{٢}}{٩+\text{س}^{٢}} \times \frac{١}{٢\text{س}}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{\text{س}}{٩+\text{س}^{٢}}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right)_{\text{س}=٠} = \frac{٢}{٣}\left(\frac{١}{٩}\right) = \frac{٢}{٢٧}$

٣٧

(١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{اس}}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{اهـ}^{\text{اس}}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{ا}^{٢}\text{هـ}^{\text{اس}}$ $\therefore \frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = \text{ا}^{٣}\text{هـ}^{\text{اس}}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}} = \text{ا}^{٤}\text{هـ}^{\text{اس}} = \text{ا}^{٤}\text{ص}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}} - \text{ا}^{٤}\text{ص} = ٠$

(٢) $\because \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} - ٢\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص} = ٠$

$\therefore \text{ا}^{٢}\text{هـ}^{\text{اس}} - ٢\text{اهـ}^{\text{اس}} + \text{هـ}^{\text{اس}} = ٠$

$\therefore \text{هـ}^{\text{اس}}(\text{ا}^{٢} - ٢\text{ا} + ١) = ٠$

$\therefore \text{هـ}^{\text{اس}}(\text{ا} - ١)^{٢} = ٠$

$\therefore (\text{ا} - ١)^{٢} = ٠$ $\therefore \text{ا} = ١$

٣٨

$\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} = ٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

$\therefore \text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{هـ}^{\text{ص}}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{١}{\text{س}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٦$ عند $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٠$

$\therefore ٢ \times \text{هـ}^{٠} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{هـ}^{٠} \times ٦ = \frac{١}{٢} \times ٦$

$\therefore ٢\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -٣$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-٣}{٢}$

٣٩

(١) $\text{ص} = \text{قا}(\text{هـ}^{\text{س}})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}(\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{طا}(\text{هـ}^{\text{س}}) \times (\text{هـ}^{\text{س}})$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قا}(\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{طا}(\text{هـ}^{\text{س}})$

(٢) $\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{٢}$ $\therefore \text{ص} = \text{هـ}^{٢-\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{هـ}^{٢-\text{س}}$

(٣) $\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٥٨$ $\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \frac{٥٨}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص} = \text{هـ}^{\frac{٥٨}{\text{س}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\frac{٥٨}{\text{س}}} \times \frac{-٥٨}{\text{س}^{٢}} = \frac{-٥٨}{\text{س}^{٢}}\,\text{هـ}^{\frac{٥٨}{\text{س}}}$

(٤) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣} - ٧\text{س}^{٢} - ٣|$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\text{س}^{٢} - ١٤\text{س}}{\text{س}^{٣} - ٧\text{س}^{٢} - ٣}$

(٥) $\text{ص} = ٢^{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢^{\text{قا}^{٢}\text{س}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}٢ \times ٢\,\text{قاس}$

$\times \text{قاس طاس}$

$= ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س طاس} \times ٢^{\text{قا}^{٢}\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

(٦) $\text{ص} = \text{لو}|\text{طاس}|$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{طاس}}$ لو هـ $= \text{قاس قتاس لو هـ}$

(٧) $\text{ص} = \text{جا}(\text{لو س})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا}(\text{لو س}) \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو هـ}$

$= \frac{\text{جتا}(\text{لو س}) \times \text{لو هـ}}{\text{س}}$

(٨) $\text{ص} = \text{لو}(\text{جتا ٥ س})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٥\,\text{جا ٥ س}}{\text{جتا ٥ س}} \times \text{لو هـ} = -٥\,\text{طا ٥ س لو هـ}$

(٩) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جا هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس} \times \text{جا هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{جاس}}$

$\times \text{جتا هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}}(\text{جتاس} \times \text{جا هـ}^{\text{س}} + \text{جتا هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}})$

(١٠) $\text{ص} = \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{طاس}} = \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{طاس}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{طاس} + \text{هـ}^{-\text{س}} \times -\text{قا}^{٢}\text{س}$

$= -\text{هـ}^{-\text{س}}(\text{طاس} + \text{قا}^{٢}\text{س})$

(١١) $\text{ص} = \sqrt{\frac{١+\text{هـ}^{\text{س}}}{١-\text{هـ}^{\text{س}}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو ص} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}(١ + \text{هـ}^{\text{س}}) - \frac{١}{٢}\,\text{لو}(١ - \text{هـ}^{\text{س}})$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\,\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١+\text{هـ}^{\text{س}}} - \frac{١}{٢}\,\frac{-\text{هـ}^{\text{س}}}{١-\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \frac{١}{٢}\,\frac{\text{هـ}^{\text{س}}(١ - \text{هـ}^{\text{س}} + ١ + \text{هـ}^{\text{س}})}{١ - \text{هـ}^{٢\text{س}}}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١ - \text{هـ}^{٢\text{س}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١ - \text{هـ}^{٢\text{س}}} \times \sqrt{\frac{١+\text{هـ}^{\text{س}}}{١-\text{هـ}^{\text{س}}}}$

(١٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

(١٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}}$

$= \frac{١}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

(١٤) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(١ + \text{هـ}^{٢\text{س}})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}}}{١ + \text{هـ}^{٢\text{س}}}$

(١٥) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{\text{م س}} + \text{هـ}^{-\text{م س}})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{م هـ}^{\text{م س}} - \text{م هـ}^{-\text{م س}}}{(\text{هـ}^{\text{م س}} + \text{هـ}^{-\text{م س}})}$

(١٦) $\text{ص} = \text{لو}\sqrt{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو هـ}}{\sqrt{\text{س}}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{لو هـ}}{٢\text{س}}$

(١٧) $\text{ص} = \sqrt{\text{لو س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{لو س}}} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو هـ} = \frac{\text{لو هـ}}{٢\text{س}\sqrt{\text{لو س}}}$

(١٨) $\text{ص} = (\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}))^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢(\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}٢\text{س})^{٢} \times \left(١ + \frac{٢}{٢\text{س}}\right)$

$= ٢\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)(\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}٢\text{س})^{٢}$

(١٩) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا}\left(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥\text{س} + ٨\right)\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا}\left(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥\text{س} + ٨\right)}{\text{جا}\left(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥\text{س} + ٨\right)} \times \left(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥\right)$

$= \left(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥\right) \text{ظتا}\left(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥\text{س} + ٨\right)$

(٢٠) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}}$

$= \frac{١}{٢}\text{لو}(\text{س} - ١) - \frac{١}{٢}\text{لو}(\text{س} + ١)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left[\frac{١}{٢(\text{س} - ١)} - \frac{١}{٢(\text{س} + ١)}\right]$

$\times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}١٠} = \left[\frac{١}{\text{س}^{٢} - ١}\right] \times \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}١٠}$

(٢١) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}^{٢}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}}\right) - ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٤}}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{س}^{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س} - ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)}{\text{س}^{٤}}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)}{\text{س}^{٣}}$

(٢٢) $\text{ص} = \text{لو}\left(\text{جتا}\,\text{س}^{٢}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جا}\,\text{س}^{٢} \times ٢\text{س}}{\text{جتا}\,\text{س}^{٢}}\text{لو}\,\text{هـ}$

$= -٢\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}^{٢}\,\text{لو}\,\text{هـ}$

(٢٣) $\text{ص} = \text{جتا}\left(\text{لو}\,\text{س}\right)^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جا}\left(\text{لو}\,\text{س}\right)^{٢} \times ٢\,\text{لو}\,\text{س} \times \frac{١}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١٠}$

$= \frac{-٢\,\text{لو}\,\text{س}\,\text{جا}\left(\text{لو}\,\text{س}\right)^{٢}}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١٠}$

(٢٤) $\text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{٥\text{س}^{٢}} - ٢$

$\therefore ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٠\text{س}\,\text{هـ}^{٥\text{س}^{٢}} - ٢$

$= ١٠\text{س}\,\text{ص}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\text{س}\,\text{ص}$

(٢٥) $\text{ص}^{٢} = ٣^{\text{س}} \times ٢^{\text{ص}}$

بأخذ لوغارتيم الطرفين للأساس هـ

$\therefore ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ + \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{٢\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ + \text{لو}_{\text{هـ}}٢\,\text{ص}'$

$\therefore \text{ص}'\left(\frac{٢}{\text{ص}} - \text{لو}_{\text{هـ}}٢\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}٣$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}٣}{\frac{٢}{\text{ص}} - \text{لو}_{\text{هـ}}٢}$

(٢٦) $\text{ص} = ٢^{\text{جا}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢^{\left(\text{جا}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)} \times \text{لو}_{\text{هـ}}٢$

$\times \left(-\text{جا}\,\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)$

(٢٧) $\text{ص} = ٤^{٢\text{جا}\,\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤^{٢\text{جا}\,\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}٤$

$\times \left(٢\,\text{جتا}\,\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}}\right)$

(٢٨) $\text{ص} = \pi^{\text{جا}\,\text{س}} + \text{هـ}^{\pi}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \pi^{\text{جا}\,\text{س}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\pi \times \text{جتا}\,\text{س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\pi\,\text{جتا}\,\text{س}\,\pi^{\text{جا}\,\text{س}}$

(٢٩) $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{٣\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \times \left(٣ + \frac{٢}{\text{س}}\right)$

(٣٠) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{قا}\,\text{س} + \text{ظا}\,\text{س}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}\,\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س} + \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{قا}\,\text{س} + \text{ظا}\,\text{س}}$

$= \frac{\text{قا}\,\text{س}\left(\text{ظا}\,\text{س} + \text{قا}\,\text{س}\right)}{\left(\text{قا}\,\text{س} + \text{ظا}\,\text{س}\right)} = \text{قا}\,\text{س}$

(٣١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}$

$= \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} - ١\right)$

٤

(١) $\text{ص} = \text{س}^{٢\text{س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢$

$\therefore \text{ص}' = ٢\,\text{ص}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١\right)$

$= ٢\text{س}^{٢\text{س}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١\right)$

(٢) $\text{ص} = \left(\text{س}^{٣} + ٥\right)^{\text{س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + ٥\right)$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + ٥\right) + \text{س} \times \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ٥}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + ٥\right) + \frac{٣\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣} + ٥}\right)$

$= \left(\text{س}^{٣} + ٥\right)^{\text{س}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + ٥\right) + \frac{٣\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣} + ٥}\right)$

(٣) $\text{ص} = ٣^{\text{س}^{٢} + ٢}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ + \left(\text{س}^{٢} + ٢\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \left(\text{س}^{٢} + ٢\right) \times \frac{١}{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\left(٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{٢} + ٢}{\text{س}}\right)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣^{\text{س}^{٢} + ٢}\left(٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{٢} + ٢}{\text{س}}\right)$

(٤) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{\text{س}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(\frac{١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\right)\text{ص}$

$= \text{س}^{\frac{١}{\text{س}}}\left(\frac{١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\right)$

(٥) $\text{ص} = \text{س}^{\text{جا}\,\text{س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{جا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{جتا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جا}\,\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(\text{جتا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)\text{ص}$

$= \text{س}^{\text{جا}\,\text{س}}\left(\text{جتا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)$

(٦) $\text{ص} = \left(\text{جا}\,\text{س}\right)^{\text{س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,\text{س}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,\text{س} + \text{س} \times \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,\text{س} + \text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س}\right)$

(٧) $\text{ص} = \left(١ - ٢\text{س}\right)^{\text{جتا}\,\text{س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{جتا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ - ٢\text{س}\right)$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = -\text{جا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ - ٢\text{س}\right) + \text{جتا}\,\text{س}$

$\times \frac{-٢}{١ - ٢\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(١ - ٢\text{س}\right)^{\text{جتا}\,\text{س}}$

$\left(-\text{جا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ - ٢\text{س}\right) - \frac{٢\,\text{جتا}\,\text{س}}{١ - ٢\text{س}}\right)$

(٨) $\text{ص} = \left(\text{جا}\,\text{س}\right)^{\text{ظا}\,\text{س}}$

(بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ)

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{ظا}\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,\text{س}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,\text{س} + \text{ظا}\,\text{س} \times \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}$

$= \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,\text{س} + ١$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(\text{جا}\,\text{س}\right)^{\text{ظا}\,\text{س}}\left(\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,\text{س} + ١\right)$

⑨ $\text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\right) \times \text{س}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$

⑩ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \text{س}^{\text{هـ}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-1}$

$\therefore$ $\text{ص}' = \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-1} \times \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$

⑪ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}+\text{س}}$

⑫ $\text{ص} = (\text{لو س})^{\text{لو س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س} + \text{لو س} \times \frac{1}{\text{لو س}} \times \frac{1}{\text{س}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص لو هـ}}{\text{س}}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س} + 1\right]$

⑬ $\text{ص} = (\text{لو س})^{\text{ظا س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{ظا س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{قا}^2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س} + \text{ظا س}\,\frac{1}{\text{لو س}} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{لو س})^{\text{ظا س}}\left(\text{قا}^2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س} + \frac{\text{ظا س لو هـ}}{\text{س لو س}}\right)$

⑭ $\text{ص} = (\text{س}^2 + 3)^{\text{لو س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 3)$

$\therefore$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 3) + \text{لو س} \times \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 3}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\left(\frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 3) + \frac{2\text{س لو س}}{\text{س}^2 + 3}\right)$

⑮ $\text{ص} = (\text{لو س})^{\text{س}}$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س}$

$\therefore$ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س} + \text{س} \times \frac{1}{\text{لو س}} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو هـ}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{لو س})^{\text{س}}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو س} + \frac{\text{لو هـ}}{\text{لو س}}\right]$

⑯ $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}^{\text{س}}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $\frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}} \times \frac{1}{\text{ص}} \times \text{ص}' = \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}}$

$\therefore$ $\frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}} \times \text{ص}' = (1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{1}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\left[(1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{1}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\right]$

---

(1)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

$\therefore$ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=1} = 1$

$\therefore$ عند س = ١ فإن ص $= \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{2} = -\text{لو}_{\text{هـ}}2$

$\therefore$ نقطة التماس هي $(1 ، -\text{لو}_{\text{هـ}}2)$

$\therefore$ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}2}{\text{س} - 1} = 1$

$\therefore$ $\text{س} - \text{ص} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}2 = \text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}$

بالقسمة على $\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}$

$\therefore$ $\frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}} - \frac{\text{ص}}{\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}} = 1$

$\therefore$ نقط تقاطع المماس مع المحاور هي :

أ $(\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ} ، 0)$ ، ب $(0 ، -\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ})$

$\therefore$ طول $\overline{\text{أب}} = \sqrt{(\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ})^2 + (-\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ})^2}$

$= \sqrt{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}$ وحدة طول

---

(2)

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}2\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2}{2\text{س}}$

$\therefore$ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=1} = 1$

$\therefore$ ميل العمودي $= -1$

$\therefore$ معادلة العمودي هي $\frac{\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}}2}{\text{س} - 1} = -1$

$\therefore$ $\text{س} + \text{ص} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}2 = \text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}$

بالقسمة على $\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}$

$\therefore$ $\frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}} + \frac{\text{ص}}{\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}} = 1$

$\therefore$ نقط تقاطع العمودي مع المحاور هي :

أ $(\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ} ، 0)$ ، ب $(0 ، \text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ})$

$\therefore$ طول $\overline{\text{أب}} = \sqrt{(\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ})^2 + (\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ})^2}$

$= \sqrt{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2\,\text{هـ}$ وحدة طول

---

(3)

$\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{\text{س}}$

$\therefore$ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=1} = \text{هـ}^1$

$\therefore$ عند س = ١ فإن ص $= \text{هـ}^1 = \text{هـ}$

$\therefore$ نقطة التماس هي $(1 ، \text{هـ})$

$\therefore$ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} - \text{هـ}}{\text{س} - 1} = \text{هـ}^1$

$\therefore$ $\text{ص} = \text{هـ}\,\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}\,\text{س}$

$\therefore$ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=1} = \text{هـ}^1$

$\therefore$ معادلة المماس $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{هـ}^1$

$\therefore$ $\text{س} = \text{ص} = 2\text{هـ}^1 = \text{هـ}^1 + \text{هـ}^1$ (بالقسمة على هـ^1)

$\frac{\text{س}}{\text{هـ}} + \frac{\text{ص}}{\text{هـ}} = 1$

$\therefore$ نقطة التقاطع $(1 ، 0)$ ، $(0 ، \text{هـ})$

$\therefore$ $\overline{\text{أب}} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - \text{هـ})^2}$

$= \sqrt{1 + \text{هـ}^2}$ وحدة طول

---

(4)

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

$\therefore$ ميل المماس $= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=1} = \frac{1}{1} = 1$

$\therefore$ عند س = ١ فإن ص $= \text{لو}_{\text{هـ}}1 = 0$

$\therefore$ نقطة التماس هي $(1 ، 0)$

$\therefore$ معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - 1} = 1$

$\therefore$ $\text{ص} = \text{س} - 1$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} - 1)$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}1$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 0$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore$ $\text{ص} = \text{س}$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = 0$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) = 0$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}1$

$\therefore$ $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 1$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^2 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2 = \text{لو}_{\text{هـ}}1^2$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^2 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2 = \text{لو}_{\text{هـ}}1$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^2 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2 = 0$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^2 = 0$ وحدة طولية

٤٦

$\text{ص} = ٤٠٠\,(١ - \text{هـ}^{-٠,٣\,\text{ن}})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٤٠٠\,(-\text{هـ}^{-٠,٣\,\text{ن}} \times -٠,٣) = ١٢٠\,\text{هـ}^{-٠,٣\,\text{ن}}$

∴ معدل التغير فى اليوم العاشر

$= \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{ن}=١٠} = ١٢٠\,\text{هـ}^{-٠,٣ \times ١٠} = ١٢٠\,\text{هـ}^{-٣}$

٤٧

$\text{ص} = (\text{ن} + ١٠٠)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{ن} + ٥)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{ن} + ٥) + (\text{ن} + ١٠٠) \times \frac{١}{\text{ن} + ٥}$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right)_{\text{ن}=٥} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,١٠ + \frac{١٠٥}{١٠} \approx ١٢,٨$

، $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right)_{\text{ن}=١٥} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٠ + \frac{١١٥}{٢٠} \approx ٨,٧$

، $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right)_{\text{ن}=٢٠} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٥ + \frac{١٢٠}{٢٥} \approx ٨,٠٢$

∴ إنتاج العسل يتناقص.

٤٨

$\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س} + \text{ص} - ٢$

$\therefore ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} + \text{هـ}^{٢\text{س}} \times \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ١ + \text{ص}'$

، عند (١ ، ١)

$\therefore ٢\,\text{هـ}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ + \text{هـ}^{٢} \times \frac{\text{ص}'}{١} = ١ + \text{ص}'$

$\therefore \text{ص}'\,(\text{هـ}^{٢} - ١) = ١$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{\text{هـ}^{٢} - ١}$

٤٩

$\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{ص} + \text{جا}^{٢}\,\text{س}$ (١)

عند س = ٠

$\therefore ٠ = \text{ص} + ٠$ ∴ ص = ٠

، باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

$\therefore \text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س ص}}\,(\text{ص} + \text{س ص}')$

$= \text{ص}' + ٢\,\text{جا س جتا س}$

، عند (٠ ، ٠)

$\therefore ١ + ٠ = \text{ص}' + ٠$ ∴ ص' = ١

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=٠} = ١$

٥٠

$\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٣} = ٠$ (١)

، عند س = ٠

$\therefore ١ - ٠ + \text{ص}^{٣} = ٠$ ∴ $\text{ص}^{٣} = -١$

∴ ص = −١

باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

$\therefore \text{هـ}^{\text{س ص}}\,(\text{ص} + \text{س ص}') - ٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص}^{٢}\,\text{ص}' = ٠$

، عند (٠ ، −١)

$\therefore ١\,(-١ + ٠) - ٠ + ٣\,(-١)^{٢}\,\text{ص}' = ٠$

$\therefore -١ + ٣\,\text{ص}' = ٠$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{٣}$ ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=٠} = \frac{١}{٣}$

٥١

$\text{س}\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} + \text{ص}\,\text{هـ}^{\frac{-\text{س}}{٢}} = ٢$ (١)

، عند س = ٠

$\therefore ٠ + \text{ص} = ٢$ ∴ ص = ٢

باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

$\therefore \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} - \frac{١}{٢}\,\text{س}\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}}\,\text{ص}' + \text{ص}'\,\text{هـ}^{\frac{-\text{س}}{٢}}$

$- \frac{١}{٢}\,\text{ص}\,\text{هـ}^{\frac{-\text{س}}{٢}} = ٠$

، عند (٠ ، ٢)

$\therefore \text{هـ}^{-١} - ٠ + \text{ص}' - \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ٠$

$\therefore \text{ص}' = ١ - \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{\text{هـ} - ١}{\text{هـ}}$

٥٢

$\text{س}^{٢}\,\text{ص} = \text{أ ب}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \text{س}^{٢}\,\text{ص}' + ٢\,\text{س ص} = \frac{\text{أ ب}}{\text{س}}$ (١)

بالاشتقاق مرة أخرى

$\therefore \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٢\,\text{س ص}' + ٢\,\text{س ص}' + ٢\,\text{ص} = \frac{-\text{أ ب}}{\text{س}^{٢}}$

$\therefore \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٤\,\text{س ص}' + ٢\,\text{ص} + \frac{\text{أ ب}}{\text{س}^{٢}} = ٠$ (٢)

بالتعويض عن قيمة أ ب من (١) فى (٢) :

$\therefore \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٤\,\text{س ص}' + ٢\,\text{ص} + \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ص}' + ٢\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}}{\text{س}^{٢}} = ٠$

$\therefore \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٤\,\text{س ص}' + ٢\,\text{ص} + \text{س ص}' + ٢\,\text{ص} = ٠$

$\therefore \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٥\,\text{س ص}' + ٤\,\text{ص} = ٠$

٥٣

$\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س ص}) = \text{س}$ (١)

$\therefore \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}$

$\therefore \text{ص}'\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \text{ص}'\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} + \frac{\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}}\,\text{ص}' = ١$

$\therefore \text{ص}'\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} + ١) = ١ - \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}'\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص} + ١) = \frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س}}$ (٢)

، من (١) فإن $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ وبالتعويض فى (٢)

$\therefore \text{ص}'\,\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}} + ١\right) = \frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{\text{ص}\,(\text{س} - \text{ص})}{\text{س}\,(\text{س} + \text{ص})}$

٥٤

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (د)

إرشادات لحل رقم **٥٥**

① ∵ $\text{ص} = ١ + \frac{\text{س}}{\lfloor ١} + \frac{\text{س}^{٢}}{\lfloor ٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{\lfloor ٣} + \dots$

$= \sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}}$

$\therefore \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

، $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = \text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}$

② ∵ $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا س} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا س}$

$= \text{د}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})$

∴ العبارة (أ) صحيحة.

، $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا س} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا س}$

$= \text{ق}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})$

∴ العبارة (ب) صحيحة.

، $\text{د}'(\text{س}) = \text{د}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{س})$

$= ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا س} = ٢\,\text{ق}(\text{س})$

∴ العبارة (جـ) صحيحة.

، $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}) - \text{د}'(\text{س})$

$= -٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا س} = -٢\,\text{د}(\text{س})$

∴ العبارة (د) خطأ.

③ ∵ د (س) = هـ^{طاس}

∴ دَ (س) = قا^٢ س هـ^{طاس} = قا^٢ س × د (س)

، ∵ قا^٢ س ≥ ١ لجميع قيم س ∈ ح

∴ دَ (س) ≥ د (س)

④ ∵ ر هي الدالة العكسية للدالة د

∴ ر [د (س)] = س

∴ رَ (د (س)) × دَ (س) = ١

بوضع س = صفر

∴ رَ (د (٠)) × دَ (٠) = ١

، ∵ د (٠) = ١ ، دَ (س) = ٢ س + ٣ + هـ^{س}

∴ دَ (٠) = ٤ ∴ رَ (١) × دَ (٠) = ١

∴ رَ (١) × ٤ = ١ ∴ رَ (١) = $\frac{١}{٤}$

٥٥

س = هـ^{جتا ٢ ن} ∴ لو_هـ س = جتا ٢ ن (١)

، ص = هـ^{جا ٢ ن} ∴ لو_هـ ص = جا ٢ ن (٢)

باشتقاق المعادلة (١) بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{١}{س} \times \frac{ءس}{ءن}$ = ٢ جا ٢ ن = − ٢ لو_هـ ص (٣)

، باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ءص}{ءن}$ = ٢ جتا ٢ ن = ٢ لو_هـ س (٤)

بقسمة (٤) على (٣)

∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ءص}{ءن} \div \frac{١}{س} \times \frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{٢ \text{ لو}_{هـ} س}{- ٢ \text{ لو}_{هـ} ص}$

∴ $\frac{س}{ص} \times \frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{لو}_{هـ} س}{- \text{لو}_{هـ} ص}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ص \text{ لو}_{هـ} س}{س \text{ لو}_{هـ} ص}$

٥٦

حل آخر :

∵ س = هـ^{جتا ٢ ن} ∴ لو_هـ س = جتا ٢ ن

، ص = هـ^{جا ٢ ن} ∴ لو_هـ ص = جا ٢ ن

بالتربيع والجمع

(لو_هـ س)^٢ + (لو_هـ ص)^٢ = (جتا ٢ ن)^٢ + (جا ٢ ن)^٢ = ١

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{٢ \text{ لو}_{هـ} س}{س} + \frac{٢ \text{ لو}_{هـ} ص}{ص} \times$ صَ = ٠

∴ صَ = $\frac{- ص \text{ لو}_{هـ} س}{س \text{ لو}_{هـ} ص}$

٥٧

ص = أ جتا (لو_هـ س) + ب جا (لو_هـ س)

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- أ \text{ جا} (\text{لو}_{هـ} س)}{س} + \frac{ب \text{ جتا} (\text{لو}_{هـ} س)}{س}$

(بالضرب × س)

∴ س $\frac{ءص}{ءس}$ = − أ جا (لو_هـ س) + ب جتا (لو_هـ س)

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس}$

= $\frac{- أ \text{ جتا} (\text{لو}_{هـ} س)}{س} - \frac{ب \text{ جا} (\text{لو}_{هـ} س)}{س}$ (بالضرب × س)

∴ س^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + س . $\frac{ءص}{ءس}$

= − (أ جتا (لو_هـ س) + ب جا (لو_هـ س)) = − ص

∴ س^٢ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = صفر

٥٧

∵ ص = س^{س}

∴ لو_هـ ص = س لو_هـ س

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{١}{ص}$ × صَ = س × $\frac{١}{س}$ + لو_هـ س

∴ $\frac{١}{ص}$ × صَ = ١ + لو_هـ س

∴ صَ = ص (١ + لو_هـ س)

∴ صَ = س^{س} (١ + لو_هـ س)

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ صً = س^{س} $\left(\frac{١}{س}\right)$ + (١ + لو_هـ س)

× س^{س} × (١ + لو_هـ س)

∴ صً = س^{س} × (١ + لو_هـ س)^٢ + س^{س − ١}

٥٨

ص = $\frac{١}{٢}$ لو_هـ $\left[\left(\frac{١ - جتا ٢ س}{١ + جتا ٢ س}\right)\right]$ = $\frac{١}{٢}$ لو_هـ $\frac{٢ جا^٢ س}{٢ جتا^٢ س}$

= $\frac{١}{٢}$ لو_هـ طا^٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{طا^٢ س}$ × ٢ طاس × قا^٢ س

= $\frac{جتا^٢ س}{جا^٢ س} \times \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{١}{جتا^٢ س}$

= $\frac{١}{جاس جتاس}$ = $\frac{١}{\frac{١}{٢} جا ٢ س}$ = ٢ قتا ٢ س

٥٩

ص = لو_هـ $\left(\frac{\sqrt{س^٢ + ١} - ١}{\sqrt{س^٢ + ١} + ١}\right)$

= لو_هـ $\left(\sqrt{س^٢ + ١} - ١\right)$ − لو_هـ $\left(\sqrt{س^٢ + ١} + ١\right)$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ س}{٢ \sqrt{س^٢ + ١} - ١}$ − $\frac{٢ س}{٢ \sqrt{س^٢ + ١} + ١}$

− $\frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١} - ١} - \frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١} + ١}\right)$

= $\frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ × $\left(\frac{\sqrt{س^٢ + ١} + ١ - \sqrt{س^٢ + ١} + ١}{س^٢ + ١ - ١}\right)$

= $\frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ × $\left(\frac{٢}{س^٢}\right)$ = $\frac{٢}{س \sqrt{س^٢ + ١}}$

٦٠

ص = س^{س^{س^{...}}} بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو_هـ ص = س^{س^{س^{..}}} لو_هـ س

∴ لو_هـ ص = ص لو_هـ س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{صَ}{ص}$ = صَ لو_هـ س + $\frac{ص}{س}$ (بالضرب × ص س)

∴ س صَ = س ص صَ لو_هـ س + ص^٢

∴ س صَ (١ − ص لو_هـ س) = ص^٢

∴ س صَ = $\frac{ص^٢}{١ - ص \text{ لو}_{هـ} س}$

٦١

ص = $\sqrt{\text{لو}_{هـ} س + \sqrt{\text{لو}_{هـ} س + \sqrt{\text{لو}_{هـ} س + ...}}}$

(بتربيع الطرفين)

∴ ص^٢ = لو_هـ س + $\sqrt{\text{لو}_{هـ} س + \sqrt{\text{لو}_{هـ} س + ...}}$

∴ ص^٢ = لو_هـ س + ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص صَ = $\frac{١}{س}$ + صَ

∴ ٢ ص صَ − صَ = $\frac{١}{س}$

∴ (٢ ص − ١) صَ = $\frac{١}{س}$

إجابات تمارين 8

أ

① $\int هـ^{٤س}\,ءس = \frac{هـ^{٤س}}{٤} + ث = \frac{١}{٤}هـ^{٤س} + ث$

② $\int هـ^{-س}\,ءس = -هـ^{-س} + ث$

③ $\int هـ^{-\frac{٣}{٤}ص}\,ءص = \frac{هـ^{-\frac{٣}{٤}ص}}{-\frac{٣}{٤}} + ث = \frac{-٤}{٣}هـ^{-\frac{٣}{٤}ص} + ث$

④ $\int -٦هـ^{٢٠ص}\,ءص = \frac{-٦هـ^{٢٠ص}}{٢٠} + ث$

$= -٣٠هـ^{٢٠ص} + ث$

⑤ $\int ٣\sqrt{٢}هـ^{-\sqrt{٢}ن}\,ءن = \frac{٣\sqrt{٢}هـ^{-\sqrt{٢}ن}}{-\sqrt{٢}} + ث$

$= -٣هـ^{-\sqrt{٢}ن} + ث$

⑥ $\int -هـ^{-٥ع}\,ءع = \frac{-هـ^{-٥ع}}{-٥} + ث$

$= \frac{١}{٥}هـ^{-٥ع} + ث$

⑦ $\int \pi هـ^{س}\,ءس = \pi هـ^{س} + ث$

⑧ $\int هـ^{١-٣س}\,ءس = \frac{هـ^{١-٣س}}{-٣} + ث$

$= \frac{-١}{٣}هـ^{١-٣س} + ث$

⑨ $\int \frac{١}{٣}هـ^{٣س-٤}\,ءس = \frac{٧}{٣}\,\frac{هـ^{٣س-٤}}{٣} + ث$

$= \frac{٧}{٩}هـ^{٣س-٤} + ث$

⑩ $\int هـ^{٧س-٤}\,ءس = \frac{هـ^{٧س-٤}}{٧} + ث$

$= \frac{١}{٧}هـ^{٧س-٤} + ث$

⑪ $\int ٥^{س}\,ءس = \frac{٥^{س}}{لو_{هـ}٥} + ث$

⑫ $\int ٢^{-س}\,ءس = \frac{٢^{-س}}{-لو_{هـ}٢} + ث$

$= \frac{-١}{لو_{هـ}٢}\,٢^{-س} + ث$

ب

① $\int (٤س - ٢هـ^{س})\,ءس$

$= \frac{٤س^{٢}}{٢} - ٢هـ^{س} + ث$

$= ٢س^{٢} - ٢هـ^{س} + ث$

② $\int (٣س^{٢} - ٤هـ^{٢س})\,ءس$

$= \frac{٣س^{٣}}{٣} - ٤\frac{هـ^{٢س}}{٢} + ث$

$= س^{٣} - ٢هـ^{٢س} + ث$

③ $\int (١ + ٤هـ^{-٣ن})\,ءس = (١ + ٤هـ^{-٣ن})س + ث$

④ $\int (هـ^{٢ك} + ٤ك)\,ءك = \frac{هـ^{٢ك}}{٢} + \frac{٤ك^{٢}}{٢} + ث$

$= \frac{١}{٢}هـ^{٢ك} + ٢ك^{٢} + ث$

⑤ $\int (٢س^{٢} + جا٢س - ٤هـ^{٣س})\,ءس$

$= \frac{٢س^{٣}}{٣} + \left(\frac{-جتا٢س}{٢}\right) - \frac{٤هـ^{٣س}}{٣} + ث$

$= \frac{٢}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}جتا٢س - \frac{٤}{٣}هـ^{٣س} + ث$

⑥ $\int (هـ^{٣س} + ٣جتاس - ٤س^{٣} + ٢)\,ءس$

$= \frac{هـ^{٣س}}{٣} + ٣جاس - \frac{٤س^{٤}}{٤} + ٢س + ث$

$= \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + ٣جاس - س^{٤} + ٢س + ث$

⑦ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢}\right)ءس$

$= \int \left(\frac{١}{٢}هـ^{س} + \frac{١}{٢}هـ^{-س}\right)ءس$

$= \frac{١}{٢}هـ^{س} - \frac{١}{٢}هـ^{-س} + ث$

⑧ $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٣}{هـ^{س}}\right)ءس = \int (١ + ٣هـ^{-س})\,ءس$

$= س - ٣هـ^{-س} + ث$

⑨ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}\right)ءس = \int (١ + هـ^{-٢س})\,ءس$

$- س + \frac{هـ^{-٢س}}{-٢} + ث = س - \frac{١}{٢}هـ^{-٢س} + ث$

⑩ $\int \left(\frac{٣هـ^{س} - ٢هـ^{٣س}}{٢هـ^{س}}\right)ءس = \int \left(\frac{٣}{٢} - هـ^{٢س}\right)ءس$

$= \frac{٣}{٢}س - هـ^{٢س} + ث$

⑪ $\int \left(\frac{هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٤}{هـ^{س}}\right)ءس$

$= \int (هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ٤هـ^{-س})\,ءس$

$= \frac{١}{٢}هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} - ٤هـ^{-س} + ث$

⑫ $\int \left(هـ^{س} + \frac{١}{هـ^{س}}\right)^{٢}ءس$

$= \int (هـ^{٢س} + ٢ + هـ^{-٢س})\,ءس$

$= \frac{١}{٢}هـ^{٢س} + ٢س - \frac{١}{٢}هـ^{-٢س} + ث$

⑬ $\int ٢هـ^{س}(هـ^{س} + ١)^{٢}\,ءس$

$= \int ٢هـ^{س}(هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ١)\,ءس$

$= \int (٢هـ^{٣س} + ٤هـ^{٢س} + ٢هـ^{س})\,ءس$

$= \frac{٢}{٣}هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ث$

⑭ $\int \left(\frac{(هـ^{س} - ٤)(هـ^{س} + ٢)}{(هـ^{س} - ٤)}\right)ءس$

$= \int (هـ^{س} + ٢)\,ءس = هـ^{س} + ٢س + ث$

⑮ $\int (س^{٢}هـ + هـ^{٣س})\,ءس$

$= \frac{س^{٢}هـ^{س+١}}{٢هـ + ١} + \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + ث$

⑯ $\int (\pi^{٤} + \pi^{س})\,ءس = \pi^{٤}س + \frac{\pi^{س}}{لو_{هـ}\pi} + ث$

ج

① بفرض أن : د (س) = س^{٢} + ١٥

∴ دَ (س) = ٢ س

∴ $\int ٢س\,هـ^{س^{٢}+١٥}\,ءس = هـ^{س^{٢}+١٥} + ث$

② بفرض أن : د (س) = س^{٢} + ١

∴ دَ (س) = ٢ س

∴ $\int ٤س\,هـ^{س^{٢}+١}\,ءس = ٢\int ٢س\,هـ^{س^{٢}+١}\,ءس$

$= ٢هـ^{س^{٢}+١} + ث$

③ بفرض أن : د (س) = س^{٣} + ١٠

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢}

∴ $\int س^{٢}هـ^{س^{٣}+١٠}\,ءس = \frac{١}{٣}\int ٣س^{٢}هـ^{س^{٣}+١٠}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}هـ^{س^{٣}+١٠} + ث$

④ بفرض أن : د (س) = س^{٢} − ٦ س − ٥

∴ دَ (س) = ٢ س − ٦ = ٢ (س − ٣)

∴ $\int (س - ٣)\,هـ^{س^{٢}-٦س-٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int ٢(س - ٣)\,هـ^{س^{٢}-٦س-٥}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}هـ^{س^{٢}-٦س-٥} + ث$

⑤ بفرض أن د (س) = س^{٤} − س^{٣}

∴ دَ (س) = ٤ س^{٣} − ٣ س^{٢}

∴ $\int س^{٢}(٤س - ٣)\,هـ^{س^{٤}-س^{٣}}\,ءس$

$= \int (٤س^{٣} - ٣س^{٢})\,هـ^{س^{٤}-س^{٣}}\,ءس$

$= هـ^{س^{٤}-س^{٣}} + ث$

⑥ بفرض أن : د (س) = س − جتاس

∴ دَ (س) = ١ + جاس

∴ $\int (١ + جاس)\,هـ^{س - جتاس}\,ءس$

$= هـ^{س - جتاس} + ث$

⑦ بفرض أن : د (س) = جتاس

∴ دَ (س) = − جاس

∴ $\int جاس \times هـ^{جتاس}\,ءس$

$= -\int (-جاس)\,هـ^{جتاس}\,ءس = -هـ^{جتاس} + ث$

⑧ بفرض أن : د (س) = جاس

∴ دَ (س) = جتاس

∴ $\int (جتاس\,هـ^{جاس} + ٣س^{٢})\,ءس$

$= هـ^{جاس} + س^{٣} + ث$

(٩) نفرض أن د(س) = √س

∴ د(س) = ١ / (٢√س)

∫ ١ / √س ءس = ٢ ∫ ١ / (٢√س) هـ^√س ءس

= ٢ هـ^√س + ث

(١٠) نفرض أن د(س) = −√س

∴ د(س) = −١ / (٢√س)

∫ ءس / (√س هـ^√س) = −٢ ∫ −١ / (٢√س) هـ^−√س ءس

= −٢ هـ^−√س + ث

(١١) نفرض أن د(س) = ١ + ٢ هـ^س

∴ د(س) = ٢ هـ^س

∫ هـ^س / (١ + ٢ هـ^س) ءس

= ١/٢ ∫ ٢ هـ^س (١ + ٢ هـ^س)^−١/٢ ءس

= ١/٢ × (١ + ٢ هـ^س)^١/٢ / (١/٢) + ث = (١ + ٢ هـ^س)^١/٢ + ث

(١٢) نفرض أن د(س) = هـ^س + ١

∴ د'(س) = هـ^س

∴ ∫ ٩ (هـ^س + ١)^٨ × هـ^س ءس = (هـ^س + ١)^٩ + ث

(١٣) نفرض أن د(س) = جاس

∴ د'(س) = جتاس

∫ ٢ جاس جتاس ءس = ∫ (جتاس) × ٢ جاس ءس

= جا^٢ س / لو_هـ ٢ + ث

(١٤) نفرض أن د(س) = جاس

∴ د'(س) = −جاس

∴ ∫ ٧^جاس جاس ءس = −∫ −جاس × ٧^جاس ءس

= −٧^جاس / لو_هـ ٧ + ث

٤

(١) ∫ ٢/س ءس = ٢ لو_هـ |س| + ث

(٢) ∫ ١/(٣س) ءس = ١/٣ لو_هـ |س| + ث

(٣) ∫ ١/(س + ١) ءس = لو_هـ |س + ١| + ث

(٤) ∫ (س + ١/س) ءس = س^٢/٢ + لو_هـ |س| + ث

(٥) ∫ (٤/س − هـ^−س) ءس

= ٤ لو_هـ |س| + هـ^−س + ث

(٦) ∫ (٣/س + ٤ هـ^−٢س) ءس

= ٣ لو_هـ |س| + ٤ هـ^−٢س / (−٢) + ث

= ٣ لو_هـ |س| − ٢ هـ^−٢س + ث

(٧) ∫ ٤/(٣س لو_هـ ٥) ءس = ٤/(٣ لو_هـ ٥) لو_هـ |س| + ث

(٨) ∫ لو_هـ ٣ / س ءس = لو_هـ ٣ . لو_هـ |س| + ث

(٩) ∫ لو_هـ س^٢ / (س لو_هـ س^٢) ءس = ∫ ٢ لو_هـ س / (٣س لو_هـ س) ءس

= ∫ ٢/(٣س) ءس = ٢/٣ لو_هـ |س| + ث

(١٠) ∫ لو_هـ س / (س لو_هـ √س) ءس = ∫ لو_هـ س / (١/٢ س لو_هـ س) ءس

= ∫ ٢/س ءس = ٢ لو_هـ |س| + ث

(١١) ∫ (٢ هـ/س + س/هـ) ءس

= ٢ هـ لو_هـ |س| + ١/(٢هـ) س^٢ + ث

(١٢) ∫ (هـ^٢/س + س لو_هـ ٣) ءس

= هـ^٢ لو_هـ |س| + ١/٢ س^٢ لو_هـ ٣ + ث

(١٣) ∫ (٣ هـ^−س + π/س) ءس

= −٣ هـ^−س + π لو_هـ |س| + ث

(١٤) ∫ (٣ س^٢ + ٥/س) ءس

= س^٣ + ٥ لو_هـ |س| + ث

(١٥) ∫ (س^٦ + ٥ هـ^س + ١/س) ءس

= ١/٧ س^٧ + ٥ هـ^س + لو_هـ |س| + ث

(١٦) ∫ (جاس − ٢/س + هـ^س) ءس

= −جتاس − ٢ لو_هـ |س| + هـ^س + ث

(١٧) ∫ (هـ^س + ٣^س + ١/س) ءس

= هـ^س + ٣^س / لو_هـ ٣ + لو_هـ |س| + ث

(١٨) ∫ (٥س + ٧/س + هـ^س) ءس

= ∫ (٥ + ٧/س + هـ^س) ءس

= ٥س + ٧ لو_هـ |س| + هـ^س + ث

(١٩) ∫ (−٣/س + ٤ هـ^−٠٫٤س + هـ^٠٫١س) ءس

= −٣ لو_هـ |س| + ٤ هـ^−٠٫٤س / (−٠٫٤) + هـ^٠٫١س + ث

= −٣ لو_هـ |س| − ١٠ هـ^−٠٫٤س + هـ^٠٫١س + ث

(٢٠) ∫ (٦س^٢ − ٥)/(٣س) ءس = ∫ (٢س − ٥/(٣س)) ءس

= س^٢ − ٥/٣ لو_هـ |س| + ث

(٢١) ∫ (س^٢ − ٤)/(س^٢ − ٢س) ءس = ∫ (س − ٢)(س + ٢)/(س(س − ٢)) ءس

∫ (س + ٢)/س ءس = ∫ (١ + ٢/س) ءس

= س + ٢ لو_هـ |س| + ث

(٢٢) ∫ (√س − ٣/س^٢) ءس = ∫ (س^١/٢ − ٦ − ٩/س) ءس

= ٢/٣ س^٣/٢ − ٦س − ٩ لو_هـ |س| + ث

(٢٣) ∫ (٢س − ١)^٢/(٣س) ءس = ∫ (٤س^٢ − ٤س + ١)/(٣س) ءس

= ∫ (٤/٣ س − ٤/٣ − ١/(٣س)) ءس

= ٢/٣ س^٢ − ٤/٣ س + ١/٣ لو_هـ |س| + ث

(٢٤) ∫ (٤ هـ^س + س هـ^٢س / هـ^س) ءس

= ∫ (٤/س + هـ^س) ءس

= ٤ لو_هـ |س| + هـ^س + ث

٥

(١) ∫ ٤/(١ + ٢س) ءس = ٢ ∫ ٢/(١ + ٢س) ءس

= ٢ لو_هـ |١ + ٢س| + ث

(٢) ∫ ءس/(٤س − ١) = ١/٤ ∫ ٤/(٤س − ١) ءس

= ١/٤ لو_هـ |٤س − ١| + ث

(٣) بفرض أن د(س) = س^٢ + ١

∴ د'(س) = ٢س

∫ س/(س^٢ + ١) ءس = ١/٢ ∫ ٢س/(س^٢ + ١) ءس

= ١/٢ لو_هـ |س^٢ + ١| + ث

(٤) بفرض أن د(س) = س^٢ − ١

∴ د'(س) = ٢س

∴ ∫ ٣س/(س^٢ − ١) ءس = ٣/٢ ∫ ٢س/(س^٢ − ١) ءس

= ٣/٢ لو_هـ |س^٢ − ١| + ث

⑤ بفرض أن : د (س) = س^{٢} + ٣ س

∴ دَ (س) = ٢ س + ٣

$\int \frac{٩ + ٦ س}{س^{٢} + ٣ س} ء س = ٣ \int \frac{٢ س + ٣}{س^{٢} + ٣ س} ء س$

= ٣ لو$_{هـ}$ |س^{٢} + ٣ س| + ث

⑥ بفرض أن : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ٧

∴ دَ (س) = ٢ س + ٢

$\int \frac{س + ١}{س^{٢} + ٢ س + ٧} ء س$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٢ س + ٢}{س^{٢} + ٢ س + ٧} ء س$

= $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ |س^{٢} + ٢ س + ٧| + ث

⑦ بفرض أن : د (س) = س^{٢} + ٣ س − ٢

∴ دَ (س) = ٢ س + ٣

∴ $\int \frac{٢ س + ٣}{س^{٢} + ٣ س - ٢} ء س$

= لو$_{هـ}$ |س^{٢} + ٣ س − ٢| + ث

⑧ بفرض أن د (س) = س^{٣} − ٥ س + ١

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٥

∴ $\int \frac{٣ س^{٢} - ٥}{س^{٣} - ٥ س + ١} ء س$

= لو$_{هـ}$ |س^{٣} − ٥ س + ١| + ث

⑨ بفرض أن د (س) = ٢ س^{٣} + س^{٢} − ١

دَ (س) = ٦ س^{٢} + ٢ س

$\int \frac{٣ س^{٢} + س}{٢ س^{٣} + س^{٢} - ١} ء س$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{٦ س^{٢} + ٢ س}{٢ س^{٣} + س^{٢} - ١} ء س$

= $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ |٢ س^{٣} + س^{٢} − ١| + ث

⑩ بفرض أن د (س) = س^{٣} + ٦ س + ١

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٦

∴ $\int \frac{س^{٢} + ٢}{س^{٣} + ٦ س + ١} ء س$

$= \frac{١}{٣} \int \frac{٣ س^{٢} + ٦}{س^{٣} + ٦ س + ١} ء س$

= $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ |س^{٣} + ٦ س + ١| + ث

⑪ $\int \frac{٢ س - ١}{س - ١} ء س$

$= \int \frac{٢ س - ٢ + ١}{س - ١} ء س$

$= \int \left(\frac{٢ س - ٢}{س - ١} + \frac{١}{س - ١} \right) ء س$

$= \int \left(٢ + \frac{١}{س - ١} \right) ء س$

= ٢ س + لو$_{هـ}$ |س − ١| + ث

⑫ $\int \frac{س^{٢}}{س + ١} ء س$

$= \int \frac{س^{٢} - ١ + ١}{س + ١} ء س$

$= \int \left(\frac{س^{٢} - ١}{س + ١} + \frac{١}{س + ١} \right) ء س$

$= \int \left(\frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} + \frac{١}{س + ١} \right) ء س$

$= \int \left(س - ١ + \frac{١}{س + ١} \right) ء س$

= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − س + لو$_{هـ}$ |س + ١| + ث

⑬ بفرض أن : د (س) = هـ^{س} + ٣

∴ دَ (س) = هـ^{س}

$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ٣} ء س$ = لو$_{هـ}$ |هـ^{س} + ٣| + ث

⑭ بالضرب بسطًا ومقامًا في هـ$^{-س}$

∴ التكامل = $\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س} - هـ^{-س}} ء س$

وبفرض د (س) = هـ^{س} − هـ$^{-س}$

∴ دَ (س) = هـ^{س} + هـ$^{-س}$

∴ التكامل = لو$_{هـ}$ |هـ^{س} − هـ$^{-س}$| + ث

① $\int$ طاس ء س = $\int \frac{جاس}{جتاس}$ ء س

= − $\int \frac{(-جاس)}{جتاس}$ ء س = − لو$_{هـ}$ |جتاس| + ث

② $\int$ طتاس ء س = $\int \frac{جتاس}{جاس}$ ء س

= لو$_{هـ}$ |جاس| + ث

③ $\int$ قاس ء س = $\int \frac{قاس (قاس + طاس)}{قاس + طاس}$ ء س

= $\int \frac{(قا^{٢} س + قاس طاس)}{قاس + طاس}$ ء س

= لو$_{هـ}$ |قاس + طاس| + ث

④ $\int$ قتاس ء س = $\int \frac{قتاس (قتاس + طتاس)}{قتاس + طتاس}$ ء س

= − $\int \frac{-(قتا^{٢} س + قتاس طتاس)}{قتاس + طتاس}$ ء س

= − لو$_{هـ}$ |قتاس + طتاس| + ث

⑤ بفرض أن : د (س) = ٢ + جاس

∴ دَ (س) = جتاس

$\int \frac{جتاس}{٢ + جاس}$ ء س = لو$_{هـ}$ |٢ + جاس| + ث

⑥ بفرض أن : د (س) = ١ + جتاس

∴ دَ (س) = − جاس

∴ $\int \frac{جاس}{١ + جتاس}$ ء س = − $\int \frac{-جاس}{١ + جتاس}$ ء س

= − لو$_{هـ}$ |١ + جتاس| + ث

⑦ بفرض أن : د (س) = طاس

∴ دَ (س) = قا^{٢} س

$\int \frac{قا^{٢} س}{طاس}$ ء س = لو$_{هـ}$ |طاس| + ث

⑧ بفرض أن : د (س) = طتاس

∴ دَ (س) = − قتا^{٢} س

∴ $\int \frac{قتا^{٢} س}{طتاس}$ ء س = − $\int \frac{-قتا^{٢} س}{طتاس}$ ء س

= − لو$_{هـ}$ |طتاس| + ث

⑨ بفرض أن : د (س) = جاس − جتاس

∴ دَ (س) = جتاس + جاس

∴ $\int \frac{جاس + جتاس}{جاس - جتاس}$ ء س

= لو$_{هـ}$ |جاس − جتاس| + ث

⑩ $\int \frac{١ - طاس}{١ + طاس} \times \left(\frac{جتاس}{جتاس} \right)$ ء س

= $\int \frac{جتاس - جاس}{جتاس + جاس}$ ء س

بفرض أن : د (س) = جتاس + جاس

∴ دَ (س) = − جاس + جتاس

∴ التكامل = لو$_{هـ}$ |جتاس + جاس| + ث

⑪ بفرض أن : د (س) = قاس − ١

∴ دَ (س) = قاس طاس

$\int \frac{قاس طاس}{قاس - ١}$ ء س = لو$_{هـ}$ |قاس − ١| + ث

⑫ بفرض أن : د (س) = جا^{٢} س + ٢ جاس − ١

∴ دَ (س) = ٢ جاس جتاس + ٢ جتاس

= جا ٢ س + ٢ جتاس

∴ $\int \frac{جا ٢ س + ٢ جتاس}{جا^{٢} س + ٢ جاس - ١}$ ء س

= لو$_{هـ}$ |جا^{٢} س + ٢ جاس − ١| + ث

⑬ $\int$ طا ٦ س ء س = $\int \frac{جا ٦ س}{جتا ٦ س}$ ء س

= $\frac{-١}{٦} \int \frac{(-٦ جا ٦ س)}{جتا ٦ س}$ ء س

= $\frac{-١}{٦}$ لو$_{هـ}$ |جتا ٦ س| + ث

(١٤) $\int \text{ظا}^2 \text{س}\, \text{ءس} = \int \text{قاس}\, \text{ظا}^2 \text{س}\, \text{ءس}$

$= \int \text{قاس}\,(\text{قا}^2 \text{س} - ١)\, \text{ءس}$

$= \int \left(\text{قاس}\, \text{قا}^2 \text{س} - \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\right) \text{ءس}$

$\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{قاس}) = -\text{قا}^2 \text{س}$ ، $\frac{\text{ء}(\text{جاس})}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\therefore$ التكامل $= \frac{١}{٢}\text{قا}^2 \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}| + \text{ث}$

حل آخر :

$\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{قاس}) = -\text{قاس}\, \text{ظاس}$

$\therefore$ التكامل $= \frac{١}{٢}\text{قا}^2 \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}| + \text{ث}$

(١٥) بفرض أن : د (س) = س + $\text{لو}_{\text{هـ}}$ قاس

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ١ + \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس}} = ١ + \text{ظاس}$

$\therefore \int \frac{(١ + \text{ظاس})}{\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{قاس}} \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{قاس}| + \text{ث}$

(١٦) بفرض أن : د (س) = س + $\text{لو}_{\text{هـ}}$ جاس

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ١ + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = ١ + \text{ظتاس}$

$\int \frac{١ + \text{ظتاس}}{\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس}} \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس}| + \text{ث}$

(١٧) $\frac{\text{جا٢س}}{\text{جا٤س}} = \frac{\text{جا٢س}}{٢\text{جا٢س جتا٢س}} = \frac{١}{٢}\text{قا٢س}$

$= \frac{١}{٢} \frac{\text{قا٢س}\,(\text{قا٢س} + \text{ظا٢س})}{\text{قا٢س} + \text{ظا٢س}}$

بفرض أن د (س) = قا٢س + ظا٢س

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٢\,\text{قا٢س ظا٢س} + ٢\,\text{قا}^2 ٢\text{س}$

$= ٢\,\text{قا٢س}\,(\text{قا٢س} + \text{ظا٢س})$

$\therefore \int \frac{\text{جا٢س}}{\text{جا٤س}} \text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا٢س} + \text{ظا٢س}| + \text{ث}$

(١٨) بفرض أن : د (س) = $\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}\,\text{س هـ}^{\text{س}-١} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}\,(\text{س هـ}^{\text{س}-١} + \text{هـ}^{\text{س}-١})$

$\therefore \int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}-١} + \text{هـ}^{\text{س}-١}}{\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}} \text{ءس}$

$= \frac{١}{\text{هـ}} \int \frac{\text{هـ}\,(\text{س هـ}^{\text{س}-١} + \text{هـ}^{\text{س}-١})}{\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}} \text{ءس}$

$= \frac{١}{\text{هـ}} \text{لو} |\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}| + \text{ث}$

٧

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (أ) (٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (د)

(٩) (جـ) (١٠) (د)

٨

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧ - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

$\text{ص} = \int (٧ - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}})\, \text{ءس} = ٧\text{س} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

$\because \text{د}(\text{لو}_{\text{هـ}} ٢) = ٣$

$٣ = ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - ٢\,\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢} + \text{ث}$

$٣ = ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - ٢ \times ٢ + \text{ث}$

$\text{ث} = ٧ - ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ = ٧\,(١ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٢) = ٧\,(\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}}{٢})$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = ٧\text{س} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ}}{٢}$

٩

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

$\therefore \text{ص} = \frac{٢\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}}}{-\frac{١}{٢}} + \text{ث} = -٤\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}} + \text{ث}$

$\because \text{د}(٠) = ١$ $\quad ١ = -٤\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}(٠)} + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = ٥$ $\quad \therefore \text{ص} = -٤\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}} + ٥$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = -٤\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}} + ٥$

$\therefore \text{د}(٣) = -٤\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}(٣)} + ٥ = ٥ - ٤\,\text{هـ}^{-\frac{٣}{٢}}$

١٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\text{س} - \text{هـ}}$

$\text{ص} = \int \frac{١}{٢\text{س} - \text{هـ}} \text{ءس} = \frac{١}{٢} \int \frac{٢}{٢\text{س} - \text{هـ}} \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{س} - \text{هـ}| + \text{ث}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{س} - \text{هـ}| + \text{ث}$

، $\because \text{د}(\text{هـ}) = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} |٢\,\text{هـ} - \text{هـ}| + \text{ث}$

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}| + \text{ث}$ $\quad \therefore \text{ث} = \text{صفر}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{س} - \text{هـ}|$

$\therefore \text{د}(٢\,\text{هـ}) = \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} |٤\,\text{هـ} - \text{هـ}| = \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} |٣\,\text{هـ}|$

$= \frac{١}{٢}[\text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} + \text{لو}_{\text{هـ}} ٣] = \frac{١}{٢}(١ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٣)$

١١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\text{س} + ٢}{\text{س}} = ٣ + \frac{٢}{\text{س}}$

(بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

$\text{ص} = \int \left(٣ + \frac{٢}{\text{س}}\right) \text{ءس} = ٣\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

$\because (\text{هـ} ، ٣\,\text{هـ} + ٥)$ تقع على المنحنى

$\therefore ٣\,\text{هـ} + ٥ = ٣\,\text{هـ} + ٢ + \text{ث}$ $\quad \therefore \text{ث} = ٣$

$\therefore \text{ص} = ٣\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + ٣$

١٢

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \text{هـ}^{-٠,١\text{ن}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى ن)

$\text{م} = \frac{\text{هـ}^{-٠,١\text{ن}}}{-٠,١} + \text{ث} = -١٠\,\text{هـ}^{-٠,١\text{ن}} + \text{ث}$

في البداية ن = ٠ ، م = ٨٠ سم^{٢}

$\therefore ٨٠ = -١٠ \times ١ + \text{ث}$ $\quad \therefore \text{ث} = ٩٠$

$\therefore \text{م} = ٩٠ - ١٠\,\text{هـ}^{-٠,١\text{ن}}$ بعد ١٠ ثوان

$(\text{م})_{\text{ن}=١٠} = (٩٠ - ١٠\,\text{هـ}^{-١})$ سم^{٢}

١٣

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} \propto \frac{١}{\text{ن}}$ حيث م هي مبيعات المصنع

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ك}}{\text{ن}}$ حيث ك ثابت بالتكامل بالنسبة إلى ن

$\text{م} = \text{ك}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ن}| + \text{ث}$

$\because \text{ن} \geq ٠$ $\quad \therefore \text{م} = \text{ك}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ن} + \text{ث}$

بعد أسبوعين كانت م = ٢٠٠

$٢٠٠ = \text{ك}\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + \text{ث}$ (١)

بعد ٤ أسابيع كانت م = ٣٠٠

$٣٠٠ = \text{ك}\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٤ + \text{ث}$ (٢)

بطرح (٢) − (١)

$١٠٠ = \text{ك}\,(\text{لو}_{\text{هـ}} ٤ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٢) = \text{ك}\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٢$

$\therefore \text{ك} = \frac{١٠٠}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢}$ بالتعويض في (٢)

$\therefore ٣٠٠ = \frac{١٠٠}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢} \times ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + \text{ث}$ $\quad \therefore \text{ث} = ١٠٠$

$\therefore \text{م} = \frac{١٠٠\,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ن}}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢} + ١٠٠ = ١٠٠\,\text{لو}_{٢} \text{ن} + ١٠٠$

$= ١٠٠\,(١ + \text{لو}_{٢} \text{ن})$

$\therefore (\text{م})_{\text{ن}=٨} = ١٠٠\,(١ + \text{لو}_{٢} ٨) = ٤٠٠$

١٤

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \propto \frac{١}{\text{س}}$ $\quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ك}}{\text{س}}$ حيث ك ثابت

عند س = ٤ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢$

$\therefore ٢ = \frac{\text{ك}}{٤}$ $\quad \therefore \text{ك} = ٨$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٨}{\text{س}}$ (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

$\therefore \text{ص} = \int \frac{٨}{\text{س}} \text{ءس}$

$\therefore \text{ص} = ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

، $\because$ عند س = ٤ $\quad \therefore \text{ص} = ٢$

$\therefore ٢ = ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٤ + \text{ث}$ $\quad \therefore \text{ث} = ٢ - ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٤$

$\therefore \text{ص} = ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + ٢ - ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٤$

١٥

① $\int \frac{١}{س \text{ لو}_{هـ} س} \, ءس = \int \left(\frac{١}{س}\right) \frac{١}{\text{لو}_{هـ} س} \, ءس$

$= \text{لو}_{هـ} |\text{لو}_{هـ} س| + ث$

② $\int \frac{٤}{س \text{ لو}_{هـ} ٣س} \, ءس$

$= ٤ \int \left(\frac{١}{س}\right) \frac{١}{\text{لو}_{هـ} ٣س} \, ءس$

$= ٤ \text{ لو}_{هـ} |\text{لو}_{هـ} ٣س| + ث$

③ $\int \frac{(\text{لو}_{هـ} س)^٢}{س} \, ءس = \int \left(\frac{١}{س}\right) (\text{لو}_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \frac{١}{٣} (\text{لو}_{هـ} س)^٣ + ث$

④ $\int \frac{(\text{لو} س)^٢}{س} \, ءس$

$= \int \frac{١}{س} \left(\frac{\text{لو}_{هـ} س}{\text{لو}_{هـ} ١٠}\right)^٢ ءس$

$= \frac{١}{(\text{لو}_{هـ} ١٠)^٢} \int \frac{١}{س} (\text{لو}_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \frac{١}{(\text{لو}_{هـ} ١٠)^٢} \times \frac{١}{٣} (\text{لو}_{هـ} س)^٣ + ث$

$= \frac{\text{لو}_{هـ} ١٠}{٣} \times \left(\frac{\text{لو}_{هـ} س}{\text{لو}_{هـ} ١٠}\right)^٣ + ث$

$= \frac{\text{لو}_{هـ} ١٠}{٣} (\text{لو} س)^٣ + ث$

$= \frac{١}{٣ \text{ لو}_{هـ}} (\text{لو} س)^٣ + ث$

⑤ $\int \frac{(١ + \text{لو}_{هـ} س)^٢}{س} \, ءس$

$= \int \left(\frac{١}{س}\right) (١ + \text{لو}_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \frac{(١ + \text{لو}_{هـ} س)^٣}{٣} + ث$

⑥ $\int \frac{٢س}{(س + ١)^٢} \, ءس = \int ٢س (س + ١)^{-٢} \, ءس$

$= ٢ \int (س + ١ - ١) (س + ١)^{-٢} \, ءس$

$= ٢ \int [(س + ١)^{-١} - (س + ١)^{-٢}] \, ءس$

$= ٢ \left(\text{لو}_{هـ} |س + ١| - \frac{(س + ١)^{-١}}{-١}\right) + ث$

$= ٢ \text{ لو}_{هـ} |س + ١| + \frac{٢}{س + ١} + ث$

⑦ $\int \frac{\sqrt{١ + \text{لو}_{هـ} س}}{س} \, ءس$

$= \int \left(\frac{١}{س}\right) (١ + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(١ + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{٣} (١ + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑧ بفرض أن : د (س) = س + لو$_{هـ}$ س

$\therefore$ دَ (س) = $١ + \frac{١}{س} = \frac{س + ١}{س}$

$\therefore \int \frac{س + ١}{س \sqrt{س + \text{لو}_{هـ} س}} \, ءس$

$= \int \left(\frac{س + ١}{س}\right) (س + \text{لو}_{هـ} س)^{-\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(س + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٢ (س + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}} + ث$

---

١٦ ① (جـ) ② (ب)

إرشادات لحل رقم ١٦

① $\because \int \frac{د(س)}{س} \, ءس = \text{لو}_{هـ} |س| + س^٢ + ث$

$\therefore \frac{ء}{ءس} \int \frac{د(س)}{س} \, ءس$

$= \frac{ء}{ءس} [\text{لو}_{هـ} |س| + س^٢ + ث]$

$\therefore \frac{د(س)}{س} = \frac{١}{س} + ٢س$

$\therefore$ د (س) = $١ + ٢س^٢$

② $\int \frac{١}{س^٣} (\text{لو}_{هـ} س^{س})^٢ \, ءس$

$= \int \frac{١}{س^٣} (س \text{ لو}_{هـ} س)^٢ \, ءس$

$= \int \frac{١}{س} (\text{لو}_{هـ} س)^٢ \, ءس = \frac{١}{٣} (\text{لو}_{هـ} س)^٣ + ث$

١٧

① بفرض أن : د (س) = لو$_{هـ}$ س

$\therefore$ دَ (س) = $\frac{١}{س}$

$\int \left(\frac{١}{س}\right) \text{ما} (\text{لو}_{هـ} س) \, ءس = \text{ما} (\text{لو}_{هـ} س) + ث$

② $\int أ^{٢ \text{ لو}_{أ} س} \, ءس = \int أ^{\text{لو}_{أ} س^٢} \, ءس$

$= \int س^٢ \, ءس = \frac{١}{٤} س^٤ + ث$

③ $\int \left(\frac{٣}{س} - \frac{٢س - ١}{س^٢ - س + ٢}\right) ءس$

$= ٣ \text{ لو}_{هـ} |س| - \text{لو}_{هـ} |س^٢ - س + ٢| + ث$

④ $\int \frac{٣س^٢ + (س^٢ + س + ١)}{س^٣ - ١} \, ءس$

$= \int \frac{٣س^٢}{س^٣ - ١} \, ءس$

$+ \int \frac{س^٢ + س + ١}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} \, ءس$

$= \text{لو}_{هـ} |س^٣ - ١| + \int \frac{١}{س - ١} \, ءس$

$= \text{لو}_{هـ} |س^٣ - ١| + \text{لو}_{هـ} |س - ١| + ث$

⑤ بفرض أن : د (س) = لو$_{هـ}$ (ما لو$_{هـ}$ س)

$\therefore$ دَ (س) = $\frac{١}{\text{ما} (\text{لو}_{هـ} س)} \times \text{ما} (\text{لو}_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$

$= \frac{١}{س} \text{ظتا} (\text{لو}_{هـ} س)$

$\int \frac{١}{س} \text{ لو}_{هـ} (\text{ما لو}_{هـ} س) \text{ ظتا} (\text{لو}_{هـ} س) \, ءس$

$= \int \left(\frac{١}{س} \text{ظتا لو}_{هـ} س\right) \text{لو}_{هـ} (\text{ما لو}_{هـ} س) \, ءس$

$= \frac{١}{٢} (\text{لو}_{هـ} (\text{ما لو}_{هـ} س))^٢ + ث$

⑥ $\int (س^٣ + أ^س + هـ^{س أ^س} + \text{ما} أ) \, ءس$

$= \frac{١}{٤} س^٤ + \frac{أ^س}{\text{لو}_{هـ} أ} + \frac{(هـ أ)^س}{\text{لو}_{هـ} أ هـ} + (\text{ما} أ) س + ث$

⑦ $\int (هـ^{س \text{ لو}_{هـ} أ} + هـ^{أ \text{ لو}_{هـ} س} + هـ^{أ \text{ لو} أ}) \, ءس$

$= \frac{هـ^{س \text{ لو}_{هـ} أ}}{\text{لو}_{هـ} أ} + \frac{س^{أ+١}}{أ + ١} + هـ^{أ \text{ لو} أ} س + ث$

الوحدة 3

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

① (ب)	② (د)	③ (ب)
④ (أ)	⑤ (ب)	⑥ (ب)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (ب)
⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (د)	⑮ (جـ)
⑯ (ب)	⑰ (د)	⑱ (جـ)
⑲ (د)	⑳ (أ)	

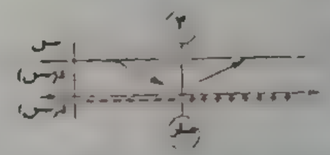
① ∵ ص = س^{٢} − ٦ س + ٧

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٦

∵ ص = س^{٢} − ٦ س + ٧

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٣

∴ النقطة الحرجة هي : (٣ ، −٢)



∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ٣[

، متزايدة في]٣ ، ∞[

② ∵ ص = ١ − ٤ س − س^{٢}

∴ المجال = ح ، $\frac{ءص}{ءس}$ = −٤ − ٢ س

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = −٢

∴ النقطة الحرجة هي (−٢ ، ٥)

∴ الدالة متزايدة في]−∞ ، −٢[

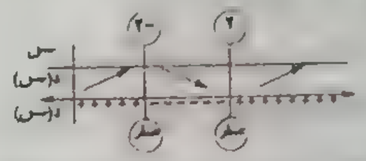
، متناقصة في]−٢ ، ∞[

③ ∵ د (س) = س^{٣} − ١٢ س + ٧

∴ المجال = ح ، دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ± ٢

∴ النقط الحرجة هي : (٢ ، −٩) ، (−٢ ، ٢٣)



∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، −٢[

،]٢ ، ∞[، متناقصة في]−٢ ، ٢[

④ ∵ د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥

∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س

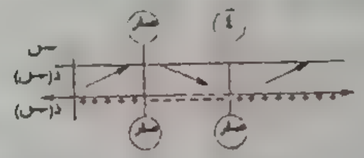
، بوضع دَ (س) = ٠

فإن : ٣ س^{٢} − ١٢ س = ٠

∴ ٣ س (س − ٤) = ٠

∴ س = ٠ أ، ٤

∴ النقط الحرجة هي : (٠ ، ٥) ، (٤ ، −٢٧)



∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ٠[

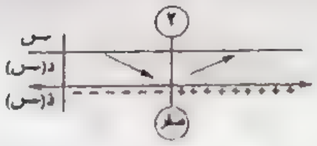
،]٤ ، ∞[، متناقصة في]٠ ، ٤[

⑤ ∵ ص = (س − ٢)^{٢} ∴ مجالها = ح

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ (س − ٢)

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ فإن : س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي : (٢ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ٢[

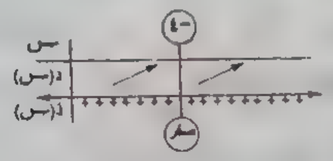
، متزايدة في]٢ ، ∞[

⑥ ∵ د (س) = (س + ٤)^{٣} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ (س + ٤)^{٢}

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −٤

∴ النقطة الحرجة هي : (−٤ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة في ح

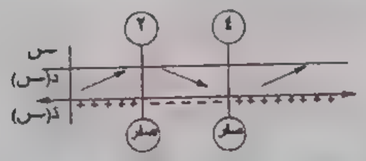
⑦ ∵ د (س) = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ٤

∴ مجالها = ح

، دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٤ أ، ٢

∴ النقط الحرجة : (٤ ، ١٢) ، (٢ ، ١٦)



∴ الدالة متزايدة في كل من :]−∞ ، ٢[

،]٤ ، ∞[، متناقصة في]٢ ، ٤[

⑧ ∵ د (س) = ٩ س − س^{٣} ∴ المجال = ح

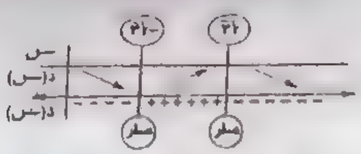
، دَ (س) = ٩ − ٣ س^{٢}

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٩ − ٣ س^{٢} = ٠

∴ س = ± $\sqrt{٣}$ ∴ س = $\sqrt{٣}$ أ، −$\sqrt{٣}$

∴ النقط الحرجة هي :

($\sqrt{٣}$ ، ٦$\sqrt{٣}$) ، (−$\sqrt{٣}$ ، −٦$\sqrt{٣}$)



∴ الدالة تناقصية في كل من]−∞ ، −$\sqrt{٣}$[

،]$\sqrt{٣}$ ، ∞[، تزايدية في]−$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$[

⑨ د (س) = س (س − ٣)^{٢} ∴ مجالها = ح

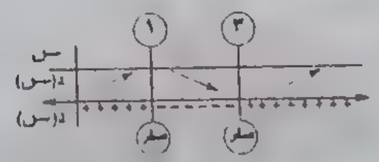
، د (س) = س (س^{٢} − ٦ س + ٩)

= س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن : س = ٣ أ، ١

∴ النقط الحرجة هي : (١ ، ٤) ، (٣ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة في كل من :]−∞ ، ١[

،]٣ ، ∞[، متناقصة في]١ ، ٣[

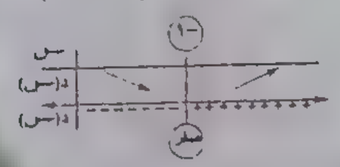
⑩ ∵ د (س) = س^{٤} + ٤ س ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٤ س^{٣} + ٤

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٤ س^{٣} + ٤ = ٠

∴ س = −١

∴ النقطة الحرجة هي : (−١ ، −٣)



∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، −١[

، متزايدة في]−١ ، ∞[

⑪ د (س) = س^{٤} − ٨ س^{٢} + ١٦ ∴ المجال ح

، دَ (س) = ٤ س^{٣} − ١٦ س

، بوضع دَ (س) = ٠

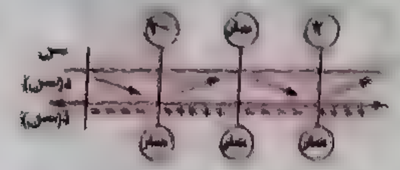
∴ ٤ س^{٣} − ١٦ س = ٠

∴ ٤ س (س^{٢} − ٤) = ٠

∴ س = ٠ ، ٢ ، −٢

∴ النقط الحرجة هي :

(٠ ، ١٦) ، (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة في كل من :

]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[

، متزايدة في كل من :]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

(١٢) ∵ د (س) = س^{٥} − ٥ س^{٤} + ١

∴ المجال = ح ، دَ (س) = ٥ س^{٤} − ٢٠ س^{٣}

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ ٥ س^{٤} − ٢٠ س^{٣} = ٠

∴ ٥ س^{٣} (س − ٤) = ٠ ∴ س = ٠ ، ٤

∴ النقط الحرجة هي : (٠ ، ١) ، (٤ ، −٢٥٥)

∴ الدالة متزايدة في كل من :]−∞ ، ٠[

،]٤ ، ∞[، متناقصة في]٠ ، ٤[

(١٣) ∵ د (س) = (س^{٢} − ٩)^{٢} ∴ المجال = ح

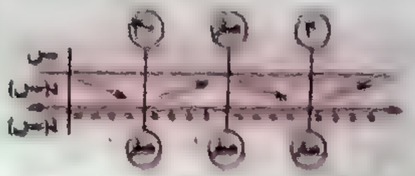
، دَ (س) = ٢ (س^{٢} − ٩) × ٢ س

= ٤ س (س^{٢} − ٩)

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٠ ، ٣ ، −٣

∴ النقط الحرجة هي :

(٠ ، ٨١) ، (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة في كل من :

]−∞ ، −٣[،]٠ ، ٣[

، ومتزايدة في كل من :]−٣ ، ٠[،]٣ ، ∞[

(١٤) ∵ د (س) = س^{٣} (س − ١)^{٢} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ س^{٢} (س − ١)^{٢} + ٢ (س^{٣}) (س − ١)

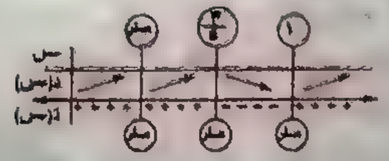
= س^{٢} (س − ١) (٣ س − ٣ + ٢ س)

= س^{٢} (س − ١) (٥ س − ٣)

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن : س = ٠ ، ١ ، $\frac{٣}{٥}$

∴ النقط الحرجة هي : (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠)

، $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{١٠٨}{٣١٢٥}\right)$



∴ الدالة متزايدة في كل من :

]−∞ ، $\frac{٣}{٥}$[،]١ ، ∞[

، متناقصة في]$\frac{٣}{٥}$ ، ١[

(١٥) د (س) = (س + ٢) (س − ١)^{٢} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ (س + ٢) (س − ١)

= (س − ١) (س − ١ + ٢ س + ٤)

= (س − ١) (٣ س + ٣)

، بوضع دَ (س) = ٠

فإن : س = ١ ، −١

∴ النقط الحرجة هي : (١ ، ٠) ، (−١ ، ٤)

∴ الدالة متزايدة في كل من

]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة في]−١ ، ١[

(١٦) ∵ د (س) = ٥ س^{٦} − ٦ س^{٥} + ١

∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣٠ س^{٥} − ٣٠ س^{٤}

= ٣٠ س^{٤} (س − ١)

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن : س = ٠ ، ١

∴ النقط الحرجة هي : (٠ ، ١) ، (١ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ١[

، متزايدة في]١ ، ∞[

(١٧) د (س) = س^{٤} + ٢ س^{٣} = ٣ س^{٢} − ٤ س

∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٤ س^{٣} + ٦ س^{٢} − ٦ س − ٤

، بوضع دَ (س) = ٠

فإن : ٤ (س^{٣} − ١) + ٦ س (س − ١) = ٠

∴ (س − ١) (٤ س^{٢} + ٤ س + ٤ + ٦ س) = ٠

∴ (س − ١) (٤ س^{٢} + ١٠ س + ٤) = ٠

∴ ٢ (س − ١) (٢ س + ١) (س + ٢) = ٠

∴ س = ١ ، −$\frac{١}{٢}$ ، −٢

∴ النقط الحرجة هي : (١ ، −٤) ، $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١٧}{١٦}\right)$

، (−٢ ، −٤)

∴ الدالة متناقصة في كل من

]−∞ ، −٢[،]$\frac{١}{٢}$ ، ١[

، متزايدة في كل من :]−٢ ، $\frac{١}{٢}$[،]١ ، ∞[

(٢)

(١) د (س) = $\frac{س}{س + ٢}$ ∴ المجال = ح − {−٢}

، دَ (س) = $\frac{(س + ٢) (١) − س (١)}{(س + ٢)^{٢}}$ = $\frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = −٢ ∉ المجال

∴ لا توجد نقط حرجة

∴ الدالة متزايدة في كل من :

]−∞ ، −٢[،]−٢ ، ∞[

(٢) د (س) = $\frac{س^{٢}}{س − ٢}$ ∴ المجال = ح − {٢}

، دَ (س) = $\frac{(س − ٢) (٢ س) − (س^{٢}) (١)}{(س − ٢)^{٢}}$

= $\frac{س^{٢} − ٤ س}{(س − ٢)^{٢}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٠ ، ٤

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٢ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة هي : (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٨)

∴ الدالة متزايدة في كل من

]−∞ ، ٠[،]٤ ، ∞[

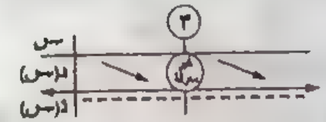
ومتناقصة في كل من]٠ ، ٢[،]٢ ، ٤[

③ د (س) = $\frac{}{س - ٣}$ ∴ المجال = ح − {٣}

، دَ (س) = $\frac{-١}{(س - ٣)^{٢}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٣ ∉ للمجال

∴ لا توجد نقط حرجة



∴ الدالة متناقصة فى كل من :

]−∞ ، ٣[،]٣ ، ∞[

④ د (س) = $\sqrt{٢س - ٣}$ ∴ المجال = [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

، دَ (س) = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢س - ٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢س - ٣}}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = $\frac{٣}{٢}$

∴ النقطة ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) هى نقطة حرجة حدية

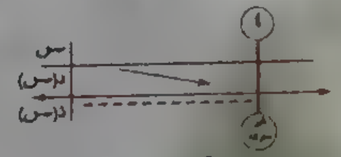
∴ الدالة متزايدة فى [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

⑤ د (س) = $\sqrt{٤ - س}$ ∴ المجال =]−∞ ، ٤]

، دَ (س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٤ - س}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٤

∴ النقطة (٤ ، ٠) هى نقطة حرجة حدية



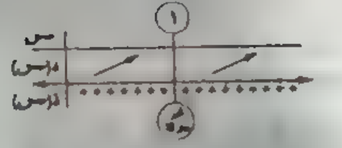
الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٤[

⑥ د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ١

∴ النقطة الحرجة (١ ، ٠)



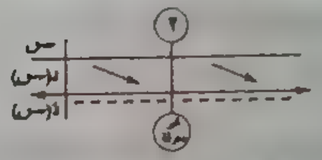
∴ الدالة متزايدة فى ح

⑦ د (س) = $\sqrt{٢ - س}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٢ - س}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هى : (٢ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة فى ح

⑧ ص = $\frac{١}{٣}$ س − $\sqrt{س}$ ∴ المجال = ح

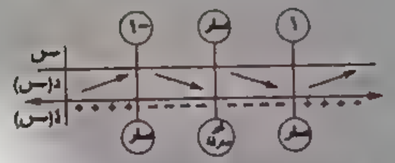
، $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = $\frac{٢\sqrt{س} - ١}{٦\sqrt{س}}$

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ نجد $\sqrt{س}$ = ١

∴ س = ١ أ، −١

، $\frac{ءص}{ءس}$ كمية غير معرفة عند س = ٠

∴ النقط الحرجة هى : (١ ، $\frac{٢}{٣}$) ، (−١ ، $\frac{٢}{٣}$) ، (٠ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى كل من :]−١ ، ٠[،]٠ ، ١[

⑨ د (س) = $س^{٣}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٠

∴ النقطة الحرجة هى : (٠ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٠[

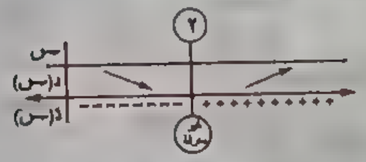
، ومتزايدة فى]٠ ، ∞[

⑩ د (س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س - ٢}}$

∴ دَ (س) غير معرفه عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة (٢ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٢[

، متزايدة فى]٢ ، ∞[

⑪ د (س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢} - ١)^{٢}}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{٤س}{٣\sqrt[٣]{س^{٢} - ١}}$

، دَ (س) = ٠ فإن س = ٠

، دَ (س) غير معرفة عند س = ١ أ، −١

∴ النقط الحرجة هى : (٠ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة فى كل من :]−١ ، ٠[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى كل من :]−∞ ، −١[،]٠ ، ١[

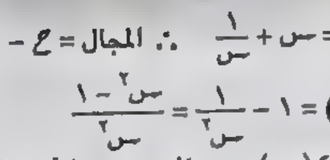
⑫ د (س) = ٢ − ٣ (س − ٢)$^{\frac{٤}{٣}}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = −٣ × $\frac{٤}{٣}$ (س − ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ × ١

= −٤ (س − ٢)$^{\frac{١}{٣}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٢

∴ النقطة الحرجة هى : (٢ ، ٢)



∴ الدالة متزايدة فى]−∞ ، ٢[

، متناقصة فى]٢ ، ∞[

⑬ د (س) = ١ − $\frac{١}{س}$ = ١ − $س^{-١}$

∴ المجال = ح − {٠}

، دَ (س) = $س^{-٢}$ = $\frac{١}{س^{٢}}$

، دَ (س) غير معرفة عند $س^{٢}$ = ٠

∴ س = ٠ ∉ المجال

∴ لا توجد نقطة حرجة

∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

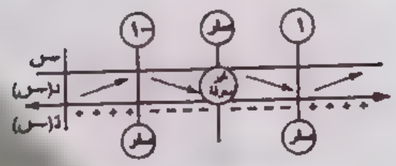
⑭ د (س) = س + $\frac{١}{س}$ ∴ المجال = ح − {٠}

، دَ (س) = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$ = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = ١ أ، −١

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة : (١ ، ٢) ، (−١ ، −٢)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى كل من :]−١ ، ٠[،]٠ ، ١[

(١٥) د (س) = $\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$

∴ المجال =]٠ ، ∞[

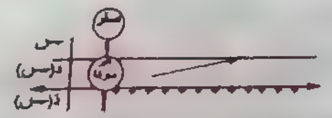
∴ دَ (س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$ [س + ١] = $\frac{\text{س} + ١}{٢\sqrt{\text{س}^{٣}}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = −١ ∉ المجال

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة غير موجودة



∴ الدالة متزايدة فى]٠ ، ∞[

(١٦) د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$

= $\frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}$

∴ المجال = ح − {١ ، −١}

، د (س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ١}$

∴ دَ (س) = $\frac{(\text{س} + ١)(١) - (\text{س} + ٢)(١)}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

= $\frac{-١}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = −١ ∉ المجال

∴ لا توجد نقط حرجة

∴ الدالة متناقصة فى كل من :

]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[

(١٧) د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ ∴ المجال = ح

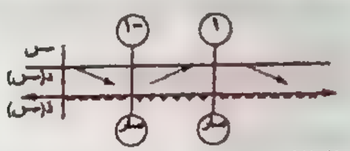
، دَ (س) = $\frac{(\text{س}^{٢} + ١)(١) - \text{س}(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

= $\frac{١ - \text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ١ أ، −١

∴ النقط الحرجة هى (١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (−١ ، $\frac{-١}{٢}$)



∴ الدالة متناقصة فى كل من :

]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، الدالة متزايدة فى]−١ ، ١[

(١٨) د (س) = $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$

∴ المجال = [−٣ ، ٣]

∴ دَ (س) = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}$ ، بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ٠

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٣ أ، −٣

∴ النقطة (٠ ، ٣) هى نقطة حرجة

، النقط (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) هى نقط حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة فى]−٣ ، ٠[

ومتناقصة فى]٠ ، ٣[

(١٩) د (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}$

∵ المجال = ح −]١ ، ٣[

، دَ (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}}$

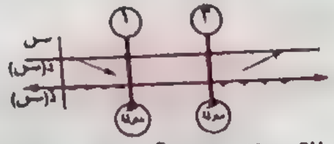
، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٢ ∉ المجال

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س^{٢} − ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠

س = ٣ أ، ١

∴ النقط (٣ ، ٠) ، (١ ، ٠) هى نقط حرجة حدية



∴ الدالة متناقصة فى]−∞ ، ١[

، ومتزايدة فى]٣ ، ∞[

(٢٠) د (س) = |س − ٣| + ٢

∴ المجال = ح

، د (س) = $\begin{cases} \text{س} - ٣ + ٢ & ، \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٣ + ٢ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

= $\begin{cases} \text{س} - ١ & ، \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٥ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

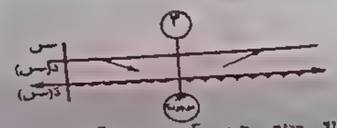
∴ دَ (س) = $\begin{cases} ١ & ، \text{س} > ٣ \\ -١ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

، ∵ دَ (٣$^{+}$) ≠ دَ (٣$^{-}$)

∴ دَ (س) = $\begin{cases} ١ & ، \text{س} > ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ٣ \\ -١ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

دَ (س) غير موجودة عند س = ٣

∴ النقطة الحرجة هى (٣ ، ٢)



الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٣[

(٢١) د (س) = ٣ − |س − ٢| ∴ المجال = ح

، د (س) = $\begin{cases} ٣ - (\text{س} - ٢) & ، \text{س} \leq ٢ \\ ٣ + (\text{س} - ٢) & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} -\text{س} + ٥ & ، \text{س} \leq ٢ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

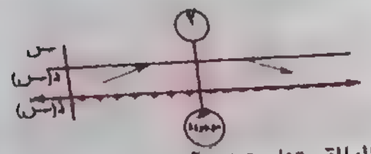
، دَ (س) = $\begin{cases} -١ & ، \text{س} < ٢ \\ ١ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

، دَ (٢)$^{+}$ ≠ دَ (٢)$^{-}$

∴ دَ (س) = $\begin{cases} -١ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{غير معرفة} & ، \text{س} = ٢ \\ ١ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

∴ دَ (س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هى (٢ ، ٣)



∴ الدالة متزايدة فى]−∞ ، ٢[

، متناقصة فى]٢ ، ∞[

(٢٢) د (س) = ٢ − $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$

∴ المجال = ح

، د (س) = ٢ − |س − ٣|

∴ د (س) = $\begin{cases} ٢ - (\text{س} - ٣) & ، \text{س} \leq ٣ \\ ٢ + (\text{س} - ٣) & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} -\text{س} + ٥ & ، \text{س} \leq ٣ \\ \text{س} - ١ & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$

∴ دَ (س) = $\begin{cases} -١ & ، \text{س} < ٣ \\ ١ & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$

، ∵ دَ (٣$^{+}$) ≠ دَ (٣$^{-}$)

∴ دَ (س) = $\begin{cases} -١ & ، \text{س} < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ٣ \\ ١ & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$

، ∵ دَ (س) غير موجودة عند س = ٣

∴ النقطة الحرجة هي (٣ ، ٢)

∴ الدالة متزايدة في]- ∞ ، ٣[

، متناقصة في]٣ ، ∞[

(٢٣) د (س) = س |س| ∴ المجال = ح

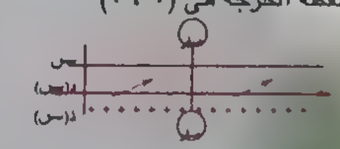
∴ د (س) = { س² ، س ≥ ٠ ؛ - س² ، س < ٠ }

∴ دَ (س) = { ٢س ، س > ٠ ؛ -٢س ، س < ٠ }

، ∵ دَ (٠⁻) = دَ (٠⁺) = ٠ فإن :

دَ (س) = { ٢س ، س > ٠ ؛ صفر ، س = ٠ ؛ -٢س ، س < ٠ }

∴ النقطة الحرجة هي (٠ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة في ح

(٢٤) د (س) = س² - |س|

∴ المجال ح

∴ د (س) { س² ، س > ٠ ؛ ٠ ، س = ٠ ؛ - س² ، س < ٠ }

∴ دَ (س) { ٢س² ، س > ٠ ؛ ٢س² ، س < ٠ }

، ∵ دَ (٠⁻) = دَ (٠⁺) = ٠

فإن دَ (س) = { ٢س² ، س > ٠ ؛ ٠ ، س = ٠ ؛ ٢س² ، س < ٠ }

∴ النقطة الحرجة هي (٠ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في]- ∞ ، ٠[

، ومتزايدة في]٠ ، ∞[

(٢٥) د (س) = س |س - ٢|

∴ المجال = ح

∴ د (س) = { س² - ٢س ، س > ٢ ؛ ٠ ، س = ٢ ؛ - س² + ٢س ، س < ٢ }

∴ دَ (س) = { ٢س - ٢ ، س > ٢ ؛ - ٢س + ٢ ، س < ٢ }

، ∵ دَ (٢⁻) ≠ دَ (٢⁺)

∴ دَ (س) = { ٢س - ٢ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ -٢س + ٢ ، س < ٢ }

وبوضع دَ (س) = ٠ عند س > ٢

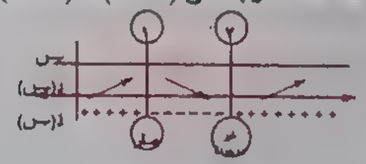
∴ س = ١ (مرفوض)

وبوضع دَ (س) = ٠ عند س < ٢

∴ س = ١

، ∵ دَ (س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (١ ، ١) ، (٢ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة في كل من :

]- ∞ ، ١[،]٢ ، ∞[

، متناقصة في]١ ، ٢[

(٢٦) د (س) = $\frac{\sqrt{س - ١}}{س}$ ∴ المجال = [١ ، ∞[

، دَ (س) = $\frac{\frac{س \times ١}{٢\sqrt{س - ١}} - \sqrt{س - ١}}{س^{٢}}$

= $\frac{س - ٢س + ٢}{٢س^{٢}\sqrt{س - ١}}$

= $\frac{٢ - س}{٢س^{٢}\sqrt{س - ١}}$

، دَ (س) = ٠ ∴ س = ٢

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

أ، عند س = ١

∴ النقطة (٢ ، $\frac{١}{٢}$) هي نقطة حرجة

، النقطة (١ ، ٠) هي نقطة حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في]١ ، ٢[

، متناقصة في]٢ ، ∞[

(٢٧) د (س) = |س² - ٥س + ٦|

∴ د (س) = { س² - ٥س + ٦ ، س < ٢ ؛ - س² + ٥س - ٦ ، ٢ ≤ س ≤ ٣ ؛ س² - ٥س + ٦ ، س > ٣ }

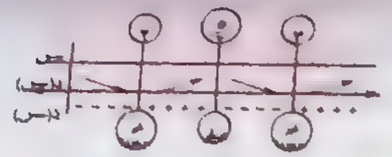
، ∵ دَ (٢⁻) ≠ دَ (٢⁺) ، دَ (٣⁻) ≠ دَ (٣⁺)

دَ (س) = { ٢س - ٥ ، س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ -٢س + ٥ ، ٢ < س < ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ ؛ ٢س - ٥ ، س > ٣ }

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ النقط الحرجة هي :

(٢ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$)



∴ الدالة متناقصة في كل من

]- ∞ ، ٢[،]$\frac{٥}{٢}$ ، ٣[

، متزايدة في كل من]٢ ، $\frac{٥}{٢}$[،]٣ ، ∞[

(٢٨) د (س) = س² $\sqrt{٧ - س^{٢}}$

∴ المجال = [-$\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٧}$]

∴ دَ (س) = ٢س $\sqrt{٧ - س^{٢}}$ + $\frac{س^{٢} \times -٢س}{٢\sqrt{٧ - س^{٢}}}$

= $\frac{٢س(٧ - س^{٢}) - س^{٣}}{\sqrt{٧ - س^{٢}}}$

= $\frac{١٤س - ٣س^{٣}}{\sqrt{٧ - س^{٢}}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٠

أ، س² = $\frac{١٤}{٣}$ ∴ س = ± $\sqrt{\frac{١٤}{٣}}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ± $\sqrt{٧}$

∴ النقط الحرجة هي :

($\frac{\sqrt{٤٢}}{٣}$ ، $\frac{١٤\sqrt{٢١}}{٩}$) ، ($\frac{-\sqrt{٤٢}}{٣}$ ، $\frac{١٤\sqrt{٢١}}{٩}$)

، النقطتين ($\sqrt{٧}$ ، ٠) ، (-$\sqrt{٧}$ ، ٠) هي نقط حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في كل من

]-$\sqrt{٧}$ ، $\frac{-\sqrt{٤٢}}{٣}$[،]٠ ، $\frac{\sqrt{٤٢}}{٣}$[

، متناقصة في كل من

]$\frac{-\sqrt{٤٢}}{٣}$ ، ٠[،]$\frac{\sqrt{٤٢}}{٣}$ ، $\sqrt{٧}$[

٢

① د (س) = ١ − جتا س

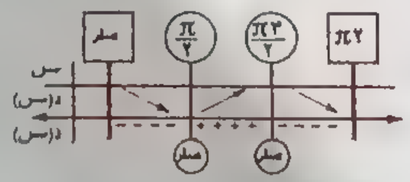
، ∵ المجال =]٠ ، ٢π[

، دَ (س) = − جا س

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ جا س = ٠

منها س = $\frac{\pi}{٢}$ أ، $\frac{٣\pi}{٢}$

∴ النقط الحرجة هى . $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\right)$



∴ الدالة متناقصة فى كل من :

]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[،]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[

، متزايدة فى]$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

② د (س) = س + ٢ جا س

∵ المجال =]٠ ، ٢π[

، دَ (س) = ١ + ٢ جتا س

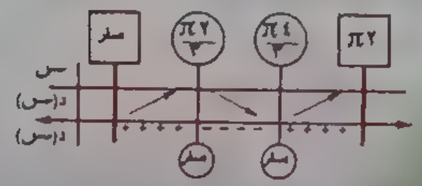
، بوضع دَ (س) = ٠ نجد أن ١ + ٢ جتا س = ٠

منها جتا س = $\frac{-١}{٢}$

∴ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ أ، $\frac{٤\pi}{٣}$

∴ النقط الحرجة هى

$\left(٢,٨٣ ، \frac{٢\pi}{٣}\right)$ ، $\left(٢,٤٦ ، \frac{٤\pi}{٣}\right)$



∴ الدالة متزايدة فى كل من

]٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$[،]$\frac{٤\pi}{٣}$ ، ٢π[

، متناقصة فى]$\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$[

③ د (س) = س − ٢ جتا س ، المجال]٠ ، ٢π[

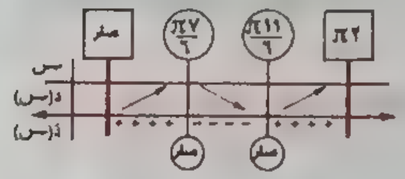
∴ دَ (س) = ١ + ٢ جا س

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ جا س = $\frac{-١}{٢}$

∴ س = $\frac{٧\pi}{٦}$ أ، $\frac{١١\pi}{٦}$

∴ النقط الحرجة هى . $\left(\frac{٧\pi}{٦} ، \frac{٧\pi}{٦} + \sqrt{٣}\right)$

، $\left(\frac{١١\pi}{٦} ، \frac{١١\pi}{٦} - \sqrt{٣}\right)$



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]٠ ، $\frac{٧\pi}{٦}$[،]$\frac{١١\pi}{٦}$ ، ٢π[

، متناقصة فى]$\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$[

④ د (س) = جا ٢ س ، المجال]٠ ، π[

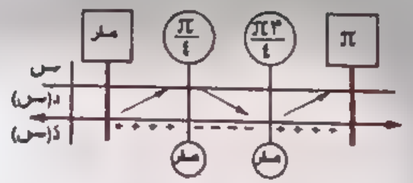
∴ دَ (س) = ٢ جتا ٢ س

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ جتا ٢ س = ٠

أى أن ٢ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٤}$

أ، ٢ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∴ س = $\frac{٣\pi}{٤}$

∴ النقط الحرجة هى . $\left(\frac{\pi}{٤} ، ١\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٤} ، -١\right)$



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[،]$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π[

، متناقصة فى :]$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$[

⑤ د (س) = جا س + جا^{٢} س ، المجال [٠ ، ٢π[

∴ دَ (س) = جتا س + ٢ جا س جتا س

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ جتا س (١ + ٢ جا س) = ٠

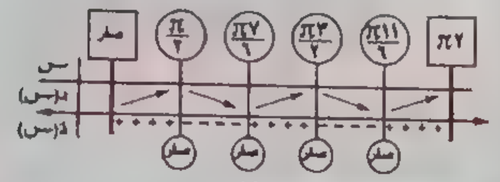
∴ جتا س = ٠ ∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ أ، $\frac{٣\pi}{٢}$

أ، (١ + ٢ جا س) = ٠ ∴ جا س = $\frac{-١}{٢}$

∴ س = $\frac{٧\pi}{٦}$ أ، $\frac{١١\pi}{٦}$

∴ النقط الحرجة هى . $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٢\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٢} ، ٠\right)$

، $\left(\frac{٧\pi}{٦} ، \frac{-١}{٤}\right)$ ، $\left(\frac{١١\pi}{٦} ، \frac{-١}{٤}\right)$



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[،]$\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$[،]$\frac{١١\pi}{٦}$ ، ٢π[

، متناقصة فى]$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$[،]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$[

⑥ د (س) = ٤ س − طا س ، المجال [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

∴ دَ (س) = ٤ − قا^{٢} س = $\frac{٤ \text{ جتا}^{٢} \text{ س} - ١}{\text{جتا}^{٢} \text{ س}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ ، ٤ جتا^{٢} س − ١ = ٠

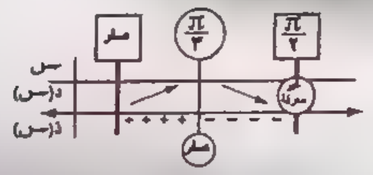
∴ جتا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٣}$

أ، جتا س = $\frac{-١}{٢}$ ∴ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∉ المجال

، دَ (س) غير معرفة عند جتا^{٢} س = ٠

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة هى : $\left(\frac{\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣} - \sqrt{٣}\right)$



∴ الدالة متزايدة فى]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[

، متناقصة فى]$\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

٥

① (أ) ② (د) ③ (د)

④ (ب) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

⑦ (أ) ⑧ (جـ) ⑨ (أ)

⑩ (جـ) ⑪ (جـ)

٦

∵ د (س) = طا س − س

∴ دَ (س) = قا^{٢} س − ١ = طا^{٢} س

∵ لكل س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[فإن : طا س > ٠

∴ لكل س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[فإن : دَ (س) > ٠

∴ د (س) متزايدة على الفترة]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

٧

ع (س) = د (س) − ر (س) لكل س ∈ ح

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ عَ (س) = دَ (س) − رَ (س)

، ∵ دَ (س) < رَ (س) لكل س ∈ ح

دَ (س) − رَ (س) < ٠

∴ عَ (س) < ٠ لكل س ∈ ح

∴ الدالة ع متناقصة لكل س ∈ ح

٨

① د (س) = س − هـ^{س} ∴ دَ (س) = ١ − هـ^{س}

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ١ − هـ^{س} = ٠

∴ هـ^{س} = ١ ∴ س = صفر

∴ الدالة متزايدة فى]−∞ ، ٠[

، ومتناقصة فى]٠ ، ∞[

② د (س) = ٥ − ٢ هـ^{٢س}

∴ دَ (س) = −٤ هـ^{٢س} ، دَ (س) = ٠

∴ −٤ هـ^{٢س} = ٠ ليس لها حل

∴ دَ (س) < ٠ لجميع قيم س

∴ الدالة متناقصة على ح

③ د (س) = س + لو_هـ س

، المجال]٠ ، ∞[

، دَ (س) = ١ + $\frac{١}{س}$

∴ لكل س > ٠ فإن : دَ (س) > ٠

∴ د (س) متزايدة على]٠ ، ∞[

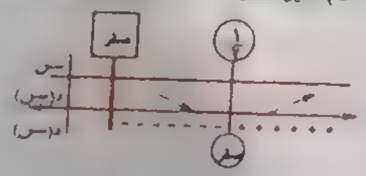
④ د (س) = ٢ س − لو_هـ س

، المجال]٠ ، ∞[، دَ (س) = ٢ − $\frac{١}{س}$

∴ دَ (س) = $\frac{٢س - ١}{س}$

، دَ (س) = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال



∴ الدالة متناقصة فى]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

، متزايدة فى]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

⑤ د (س) = ٢ − لو_هـ س^٢

∴ المجال = ح − {٠}

∴ دَ (س) = $\frac{-٢س}{س^٢}$ = $\frac{-٢}{س}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ الدالة متزايدة فى]−∞ ، ٠[

، متناقصة فى]٠ ، ∞[

⑥ ر (س) = ٢ لو_هـ س − س^٢

∴ المجال =]٠ ، ∞[

، رَ (س) = $\frac{٢}{س}$ − ٢ س = $\frac{٢ - ٢س^٢}{س}$

، بوضع رَ (س) = ٠ منها ٢ − ٢ س^٢ = ٠

∴ س = ١ ، −١ ∉ المجال

، رَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ الدالة متزايدة فى]٠ ، ١[

، متناقصة فى]١ ، ∞[

---

① د (س) = { س^٢ + ٢ ، س ≤ ١ ؛ ٢ س + ١ ، س > ١ }

، ∵ د (١^+) = د (١) = ٣ ، دَ (١^+) = دَ (١^−)

فإن : دَ (س) = { ٢ س ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

، بوضع دَ (س) = ٠ عند س < ١

فإن : ٢ س = ٠ ∴ س = ٠

، عند س ≥ ١ فإن دَ (س) ≠ ٠

∴ النقطة الحرجة هى (٠ ، ٢)

∴ الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٠[

، متزايدة فى]٠ ، ∞[

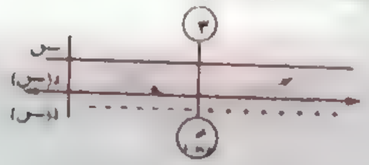
② د (س) = { ٧ − ٢ س ، س < ٣ ؛ ٣ س − ٨ ، س ≥ ٣ }

، ∵ د (٣^+) = د (٣^−) = د (٣)

، دَ (٣^+) ≠ دَ (٣^−)

∴ دَ (س) = { −٢ ، س < ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ ؛ ٣ ، س > ٣ }

∴ النقطة الحرجة هى (٣ ، ١)



∴ الدالة متناقصة فى]−∞ ، ٣[

، متزايدة فى]٣ ، ∞[

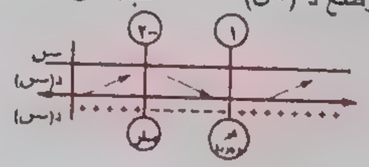
③ د (س) = { ٣ − ٤ س − س^٢ ، س ≤ ١ ؛ ٢ س − ٤ ، س > ١ }

، ∵ د (١^+) = د (١^−) = د (١)

، دَ (١^−) ≠ دَ (١^+)

∴ دَ (س) = { −٤ − ٢ س ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

، بوضع دَ (س) = ٠ نجد س = −٢



∴ النقطة الحرجة هى (−٢ ، ٧) (١ ، −٢)

∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]−∞ ، −٢[،]١ ، ∞[

، متناقصة فى]−٢ ، ١[

④ د (س) = { ٣ س + ١ ، س ≤ ١ ؛ ٥ − س^٢ ، س > ١ }

، ∵ د (١^+) = د (١^−) = د (١)

، دَ (١^−) ≠ دَ (١^+)

، دَ (١^−) ≠ دَ (١^+)

∴ دَ (س) = { ٣ ، س < −١ ؛ غير موجودة ، س = −١ ؛ ٢ س ، −١ < س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ −٢ س ، س > ٢ }

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ ٢ س = ٠ ، منها س = ٠

∴ النقطة الحرجة هى (٠ ، ١)

∴ الدالة متزايدة فى]−∞ ، −١[،]٠ ، ٢[

، متناقصة فى]−١ ، ٠[،]٢ ، ∞[

١٠

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) ∴ ء = ٠

، دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ

، ∵ عند س = ١ توجد نقطة حرجة [دَ (١) = ٠]

∴ ٣ أ + ٢ ب + حـ = ٠ (١)

، المستقيم ٩ س + ص = ٢٠

يمس المنحنى عند النقطة (٢ ، د (٢))

∴ دَ (٢) = −٩

∴ ١٢ أ + ٤ ب + حـ = −٩ (٢)

، د (٢) = −٩ × ٢ + ٢٠ = ٢

∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ حـ = ٢

أى أن : ٤ أ + ٢ ب + حـ = ١ (٣)

من (١) ، (٣) : ∴ أ = ١

، من (١) : ٢ ب + حـ = −٣

من (٢) : ٤ ب + حـ = −٢١ ∴ ب = −٩ ، حـ = ١٥

١١

① د (س) = { ٢ − (س − ٢)^{٢} ، −٤ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٢ ، ٢ < س < ٤ ؛ ٧ − س ، ٤ ≤ س ≤ ٨ }

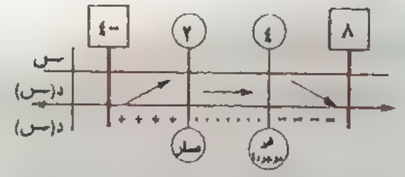
∵ د (٢$^{+}$) = د (٢$^{-}$) = د (٢)

، د (٤$^{+}$) = د (٤$^{-}$) = د (٤)

، دَ (٢$^{-}$) = دَ (٢$^{+}$) ، دَ (٤$^{-}$) ≠ دَ (٤$^{+}$)

دَ (س) = { −٢ (س − ٢) ، −٤ ≤ س < ٢ ؛ ٠ ، س = ٢ ؛ ٠ ، ٢ < س < ٤ ؛ غير موجودة ، س = ٤ ؛ −١ ، ٤ < س ≤ ٨ }

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س ∈ [٢ ، ٤]



∴ الدالة متزايدة فى]−٤ ، ٢[

، متناقصة فى]٤ ، ٨[

② د (س) = { ٢ س − س^{٢} ، س ≤ ١ ؛ ١ ، ١ < س ≤ ٤ ؛ س^{٢} − ٨ س + ١٧ ، س > ٤ }

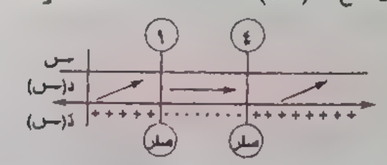
∵ د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$) = د (١)

، د (٤$^{+}$) = د (٤$^{-}$) = د (٤)

، دَ (١$^{-}$) = دَ (١$^{+}$) ، دَ (٤$^{-}$) = دَ (٤$^{+}$)

دَ (س) = { ٢ − ٢ س ، س < ١ ؛ ٠ ، س = ١ ؛ ٠ ، ١ < س < ٤ ؛ ٠ ، س = ٤ ؛ ٢ س − ٨ ، س > ٤ }

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س ∈ [١ ، ٤]



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]−∞ ، ١[،]٤ ، ∞[

---

١٢ ① (جـ) ② (جـ) ③ (ب)

④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٢

① ∵ دَ (س) < ٠ ∴ الدالة د متناقصة.

، ∵ س > س − ١

∴ د (س) < د (س − ١)

② ∵ د متناقصة. ∴ دَ (س) ≤ ٠

∴ أ س^{٢} + ب س + حـ ≤ ٠

وذلك يتحقق إذا كان : أ < ٠

، المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ ≤ ٠

③ ∵ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ٣

، ∵ د تزايدية على ح وكثيرة حدود

∴ دَ (س) ≥ ٠

∴ المميز = (٢ أ)^{٢} − ٤ (٣) (٣) ≤ ٠

∴ ٤ أ^{٢} ≤ ٣٦ ∴ أ^{٢} ≤ ٩

∴ |أ| ≤ ٣ ∴ −٣ ≤ أ ≤ ٣

∴ أ ∈ [−٣ ، ٣]

④ ∵ دَ (س) = ٣ ك س^{٢} + ٥

وبوضع دَ (س) = ٠

∴ ٣ ك س^{٢} + ٥ = ٠ ∴ س^{٢} = $\frac{-٥}{٣ك}$

حتى يكون للمعادلة حلان لابد أن تكون ك < ٠

∴ ك ∈]−∞ ، ٠[

⑤ ∵ ع (س) = $\frac{د (س)}{\sqrt{(س)}}$ = $\frac{موجب}{موجب}$ = موجب

، عَ (س) = $\frac{\sqrt{(س)} \times دَ (س) - د (س) \times \sqrt{(س)}'}{[\sqrt{(س)}]^{٢}}$

= $\frac{موجب \times موجب - موجب \times سالب}{(موجب)^{٢}}$

= موجب

∴ ع تكون موجبة وتزايدية.

⑥ ∵ دَ (س) تكون تزايدية

∴ دَ (س) > ٠

ومن الرسم :

∵ دَ (س) > ٠ لكل س ∈]٠ ، ٤[

∴ دَ (س) تزايدية فى الفترة]٠ ، ٤[

١

① ص = س^{٢} + ٤ س + ٦

، صَ = ٢ س + ٤ وبوضع صَ = ٠

∴ س = −٢ ، صً = ٢ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −٢

د (−٢) = ٢

② ص = ٤ − ٦ س − س^{٢}

∴ صَ = −٦ − ٢ س ، بوضع صَ = ٠

∴ س = −٣ ، صً = −٢ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −٣

د (−٣) = ١٣

③ ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٩ س + ٢

، صَ = س^{٢} − ٩ ، عندما صَ = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٣

، صً = ٢ س عند س = ٣

صً = ٦ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية ، د (٣) = −١٦

، عند س = −٣ صً = −٦ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية ، د (−٣) = ٢٠

④ د (س) = ٤ س − س^{٣}

∴ دَ (س) = ٤ − ٣ س^{٢}

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٤ − ٣ س^{٢} = ٠

∴ س^{٢} = $\frac{٤}{٣}$ ∴ س = ± $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

، دَ (س) = −٦ س ∴ دَ ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) < ٠ سالب

يوجد قيمة عظمى محلية د ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{١٦\sqrt{٣}}{٩}$

، دَ ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) > ٠ موجبة

يوجد قيمة صغرى محلية د ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{-١٦\sqrt{٣}}{٩}$

⑤ ∵ د (س) = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ١٥

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٨ س

= ٣ س (س − ٦)

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = ٠ أ، س = ٦

، ∵ دً (س) = ٦ س − ١٨

∴ عند س = ٠ فإن : دً (٠) < ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية هي : د (٠) = ١٥

، عند س = ٦ فإن : دً (٦) > ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية هي : د (٦) = −٩٣

⑥ ∵ د (س) = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٥

∴ دَ (س) = ٦ س^{٢} + ٦ س − ١٢

= ٦ (س^{٢} + س − ٢)

= ٦ (س + ٢) (س − ١)

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = −٢ أ، س = ١

، ∵ دً (س) = ١٢ س + ٦ ∴ دً (−٢) < ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية = د (−٢) = ٢٥

، ∵ دً (١) > ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية = د (١) = −٢

⑦ د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٩ س − ٧

دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٦ س − ٩

دَ (س) = ٠ ∴ ٣ س^{٢} + ٦ س − ٩ = ٠

∴ س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠

∴ س = ١ أو س = −٣ دً (س) = ٦ س + ٦

دً (١) > ٠ موجب ، يوجد قيمة صغرى محلية.

د (١) = −١٢

دً (−٣) < ٠ سالب ، يوجد قيمة عظمى محلية.

د (−٣) = ٢٠

⑧ هـ (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٣ س + ٢

هـَ (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س + ٣

٣ (س^{٢} − ٢ س + ١) = ٣ (س − ١)^{٢}

، عندما هـَ (س) = ٠ ∴ س = ١

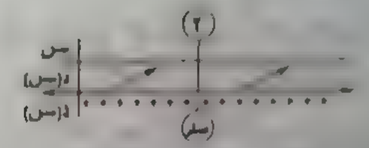
∴ عند س = ١

لا توجد قيمة عظمى أ، صغرى محلية.

⑨ د (س) = (س − ٢)^{٢} + ٥

دَ (س) = ٢ (س − ٢)

، دَ (س) = ٠ عند س = ٢



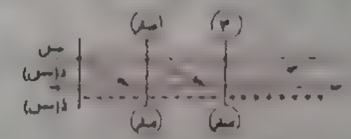
∴ عند س = ٢

لا توجد قيمة عظمى أ، صغرى محلية.

⑩ د (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − س^{٣}

∴ دَ (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} = س^{٢} (س − ٣)

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٠ أ، س = ٣



∴ عند س = ٠

لا توجد قيمة عظمى أ، صغرى محلية.

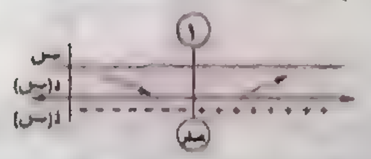
، للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د (٣) = $\frac{-٢٧}{٤}$

⑪ د (س) = (س − ١)^{٤} + ٢

∴ دَ (س) = ٤ (س − ١)^{٣}

، دَ (س) = ٠ عندما س = ١



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١

، د (١) = ٢

⑫ د (س) = س (١ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}) = س − $\frac{١}{٢}$ س^{٣}

دَ (س) = ١ − ٤ س^{٢}

دَ (س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٢}$ أ، −$\frac{١}{٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٢}$

، د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٣}$

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −$\frac{١}{٢}$

، د (−$\frac{١}{٢}$) = −$\frac{١}{٣}$

⑬ د (س) = س^{٤} − ٢ س^{٢}

دَ (س) = ٤ س^{٣} − ٤ س = ٤ س (س^{٢} − ١)

= ٤ س (س − ١) (س + ١)

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = ٠

أ، س = ١ أ، س = −١

، ∵ دً (س) = ١٢ س^{٢} − ٤

، ∵ دً (٠) < ٠ ∴ عند س = ٠

توجد قيمة عظمى محلية = د (٠) = صفر

، ∵ دً (١) > ٠ ∴ عند س = ١

توجد قيمة صغرى محلية = د (١) = ١ − ٢ = −١

، ∵ دً (−١) > ٠

∴ عند س = −١ توجد قيمة صغرى محلية

= د (−١) = −١

⑭ د (س) = ٣ س^{٥} − ٥ س^{٣}

دَ (س) = ١٥ س^{٤} − ١٥ س^{٢}

دَ (س) = ٠ ١٥ س^{٤} − ١٥ س^{٢} = ٠

١٥ س^{٢} (س^{٢} − ١) = ٠

س = ٠ أو س = ١ أو س = −١

للدالة قيمة عظمى محلية د (−١) = ٢

للدالة قيمة صغرى محلية د (١) = −٢

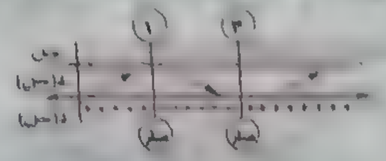
⑮ د (س) = س (س − ٣)^{٢} + ٢

دَ (س) = ٢ س (س − ٣) + (س − ٣)^{٢}

= (س − ٣) (٢ س + س − ٣)

= (س − ٣) (٣ س − ٣)

دَ (س) = ٠ عندما س = ٣ أ، س = ١



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١

، د (١) = ٦

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د (٣) = ٢

⑯ د (س) = (س − ١) (س − ٢)^{٢}

د (س) = ٢ (س − ١) (س − ٢) + (س − ٢)^{٢}

= (س − ٢) (٢ س − ٢ + س − ٢)

= (س − ٢) (٣ س − ٤)

دَ (س) = ٠ عند س = ٢ أ، س = $\frac{٤}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{٤}{٣}$

، د ($\frac{٤}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$

للدالة قيمة صغرى عند س = ٢ ، د (٢) = ٠

د(س) = ٤ س^٤ ، ٤ س^٣ = ٠ ؟

د′(س) = ١٦ س^٣ ، ١٢ س^٢ = ٠

= ٤ س (س^٢ = ٣) ، س (س + ٢)

= ٤ س (س − √٣) (س + √٣) (س + ٢)

∴ د′(س) = ٠ عندما س = ٠ أو س = ؟

فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، د(٠) = ٠ ؟

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢

، د(٢) = −٢٥ ؟

للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د(٢) = −١٤ ؟

(١٨) د(س) = $\frac{٢}{٣}$ س^٣ − ٤ س^٢ − ٦ س^٢ + ٤٨ س

د′(س) = س^٢ − ١٢ س^٢ − ٤ س + ٤٨

= س^٢ (س − ١٢) − ٤ (س − ١٢)

= (س − ١٢) (س^٢ − ٤)

، د′(س) = ٠ عندما س = ١٢ أو س = ٢

أو س = −٢

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١٢

، د(١٢) = −١٤٤٠

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −٢

، د(−٢) = −٦٨

للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د(٢) = ٦٠

(١٩) د(س) = ٨ س^٣ = (س − ٢)^٢

د′(س) = ٢٤ س^٢ − ٤ (س − ٢)^٢

عندما د′(س) = ٠ ، ٨ س^٢ = (س − ٢)^٢

٢ س = س − ٢ ، ومنها س = −٢

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −٢

، د(−٢) = −١٢٨

(٢٠) د(س) = س^٤ (س + ٢)^٢

د′(س) = ٤ س^٣ (س + ٢)^٢ + ٢ س^٤ (س + ٢)

= ٢ س^٣ (س + ٢) [٢ (س + ٢) + س]

= ٢ س^٣ (س + ٢) (٣ س + ٤)

، د′(س) = ٠ عندما س = ٠ أو س = −٢

أو س = −$\frac{٤}{٣}$

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، د(٠) = ٠

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −٢

، د(−٢) = ٠

للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −$\frac{٤}{٣}$

، د(−$\frac{٤}{٣}$) = $\frac{١٠٢٤}{٧٢٩}$

ج

(١) للدالة قيمة عظمى محلية د(٠) = ٠

ولها قيمة صغرى محلية د(٢) = −٤

(٢) للدالة قيمة عظمى محلية د(−١) = −٢

للدالة قيمة صغرى محلية د(١) = ٢

(٣) للدالة قيمة عظمى محلية د(٠) = ٠

للدالة قيمة صغرى محلية د(١) = −١

د

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (أ)

(٤) (ب) (٥) (د) (٦) (د)

(٧) (أ) (٨) (أ) (٩) (د)

(١٠) (أ) (١١) (أ) (١٢) (د)

(١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (د)

هـ

(١) د(س) = س + $\frac{١}{س}$

∴ مجال الدالة هو : ح − {٠}

د′(س) = ١ − س^−٢ ، د″(س) = ٢ س^−٣

، د′(س) = ٠ عندما س = ١ أو س = −١

، ∵ د″(١) = ٢ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١

، ∵ د″(−١) = −٢ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −١

(٢) د(س) = س^٢ − س^−٢

مجال الدالة هو : ح − {٠}

د′(س) = ٢ س + ٢ س^−٣ = $\frac{٢ س^٤ + ٢}{س^٣}$

د″(س) = ٢ − ٦ س^−٤

، د″(س) غير موجودة عندما س = ٠

ولكن ٠ ∉ لمجال الدالة

∴ لا يوجد نقط حرجة للدالة.

(٣) د(س) = س^٣ + ٤٨ س^−١

، مجال الدالة هو . ح − {٠}

د′(س) = ٣ س^٢ − ٤٨ س^−٢

= ٣ س^٢ − $\frac{٤٨}{س^٢}$ = $\frac{٣ س^٤ − ٤٨}{س^٢}$

د″(س) = ٦ س + ٩٦ س^−٣

، د′(س) = ٠ عندما س = ٢ أو س = −٢

، د″(٢) = ٢٤ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢

د″(−٢) = −٢٤ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −٢

(٤) د(س) = س^٢ + ١٦ س^−١

، مجال الدالة : ح − {٠}

د′(س) = ٢ س − ١٦ س^−٢ = $\frac{٢ س^٣ − ١٦}{س^٢}$

د″(س) = ٢ + ٣٢ س^−٣

، د′(س) = ٠ عندما س = ٢

د″(٢) = ٦ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢

(٥) د(س) = س + $\frac{١}{س − ١}$

د′(س) = ١ + $\frac{−١}{(س − ١)^٢}$ = $\frac{(س − ١)^٢ − ١}{(س − ١)^٢}$

د″(س) = ٨ (س − ١)^−٣

د′(س) = ٠ عندما (س − ١)^٢ = ١

∴ س − ١ = ± ١ ومنها س = ٢ أو س = ٠

د″(٢) = ١ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢

، د″(٠) = −١ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٠

(٦) د(س) = $\frac{٣}{س − ٢}$ ، س ≠ ٢

د′(س) = $\frac{(س − ٢)(٠) − ٣(١)}{(س − ٢)^٢}$ = $\frac{−٣}{(س − ٢)^٢}$

لا توجد نقط في المجال تجعل د′(س) = ٠

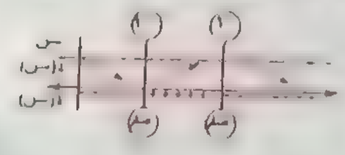
أو غير معرفة ليس للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية.

(٧) د (س) = $\frac{٢ س}{س^٢ + ١}$

د′(س) = $\frac{٢ (س^٢ + ١) - ٢ س (٢ س)}{(س^٢ + ١)^٢}$

= $\frac{٢ س^٢ + ٢}{(س^٢ + ١)^٢}$

، د′(س) = ٠ عندما س = ١ أ، س = −١



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١

، للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −١

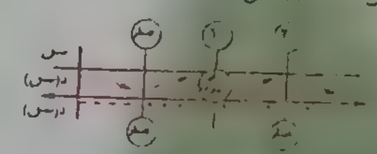
(٨) د (س) = $\frac{س^٢}{١ - س}$ ، مجال الدالة = ح − {١}

∴ د′(س) = $\frac{(١ - س)(٢ س) + س^٢}{(١ - س)^٢}$

= $\frac{س^٢ + ٢ س}{(١ - س)^٢}$

، د′(س) = ٠ عندما س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٢



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

(٩) د (س) = $\frac{١ + س}{١ - س}$ ، مجال الدالة ح − {١}

∴ د′(س) = $\frac{(١ - س) + (١ + س)}{(١ - س)^٢}$ = $\frac{٢}{(١ - س)^٢}$

∴ د′(س) ≠ ٠

∴ لا توجد للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية

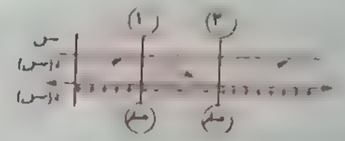
(١٠) د (س) = $\frac{س^٢ - ٣}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

∴ د′(س) = $\frac{(س - ٢)(٢ س) - (س^٢ - ٣)(١)}{(س - ٢)^٢}$

= $\frac{س^٢ - ٤ س + ٣}{(س - ٢)^٢}$

، د′(س) = ٠ فإن س^٢ − ٤ س + ٣ = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ١



للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١

، للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

(١١) د (س) = $\frac{٤ س - ٣}{س^٢ - ١}$ ، مجال الدالة : ح − {١ ، −١}

∴ د′(س) = $\frac{٤ (س^٢ - ١) - (٤ س - ٣)(٢ س)}{(س^٢ - ١)^٢}$

= $\frac{٤ س^٢ - ٤ - ٨ س^٢ + ٦ س}{(س^٢ - ١)^٢}$

= $\frac{-٤ س^٢ + ٦ س - ٤}{(س^٢ - ١)^٢}$

، د′(س) = ٠ عندما −٤ س^٢ + ٦ س − ٤ = ٠

٢ س^٢ − ٣ س + ٢ = ٠ ليس له جذور حقيقية

∴ الدالة ليس لها قيمة عظمى أو صغرى محلية.

(١٢) د (س) = $\frac{٥ - س}{س^٢ - ٩}$ ، مجال الدالة : ح − {٣ ، −٣}

∴ د′(س) = $\frac{-(س^٢ - ٩) - (٥ - س)(٢ س)}{(س^٢ - ٩)^٢}$

= $\frac{-س^٢ + ٩ - ١٠ س + ٢ س^٢}{(س^٢ - ٩)^٢}$

= $\frac{س^٢ - ١٠ س + ٩}{(س^٢ - ٩)^٢}$

، د′(س) = ٠ عندما س^٢ − ١٠ س + ٩ = ٠

ومنها س = ٩ أ، س = ١

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٩

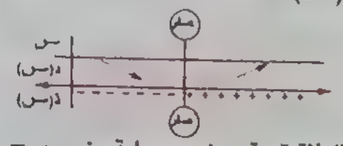
، للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١

(١٣) د (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

∴ د′(س) = $\frac{(س^٢ + ١)(٢ س) - (س^٢ - ١)(٢ س)}{(س^٢ + ١)^٢}$

= $\frac{٤ س}{(س^٢ + ١)^٢}$

، د′(س) = ٠ ∴ ٤ س = ٠ ∴ س = ٠



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

(١٤) د (س) = $\frac{٣ س^٢ + ٥ س + ٢٥}{س + ٢}$

، مجال الدالة : ح − {−٢}

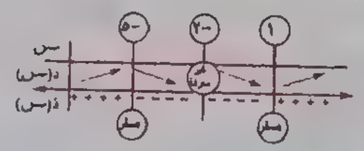
∴ د′(س)

= $\frac{(س + ٢)(٦ س + ٥) - (٣ س^٢ + ٥ س + ٢٥)(١)}{(س + ٢)^٢}$

= $\frac{٣ س^٢ + ١٢ س - ١٥}{(س + ٢)^٢}$

، د′(س) = ٠ عندما ٣ س^٢ + ١٢ س − ١٥ = ٠

ومنها س = ١ أ، س = −٥



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١

للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −٥

(١٥)

(١) د (س) = ٣ − س^$\frac{٢}{٣}$

∴ د′(س) = −$\frac{٢}{٣}$ س^$\frac{-١}{٣}$ = $\frac{-٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، د′(س) غير معرفة عند س = ٠

للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٣)

(٢) د (س) = (س + ٢)^$\frac{٢}{٣}$

∴ د′(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س + ٢)^$\frac{-١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س + ٢}}$

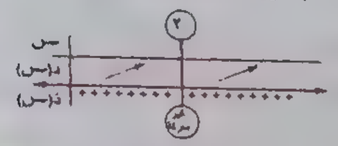
، د′(س) غير معرفة عند س = −٢

للدالة قيمة صغرى محلية عند (−٢ ، ٠)

(٣) د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٢}$

∴ د′(س) = $\frac{١}{٣}$ (س − ٢)^$\frac{-٢}{٣}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س - ٢)^٢}}$

، د′(س) غير معرفة عند س = ٢



∴ لا توجد قيم عظمى أ، صغرى محلية للدالة.

(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^٢}$

∴ د′(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س − ٢)^$\frac{-١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س - ٢}}$

، د′(س) غير موجودة عند س = ٢

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٠)

⑤ د (س) = ٢ − $\sqrt[٣]{(٣ - س)^{٢}}$

∴ دَ (س) = $\frac{٢}{٣}$ (٣ − س)$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{٣ - س}}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٣

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٣ ، ٢)

⑥ د (س) = $\sqrt[٣]{٢٧ - ٨ س^{٣}}$

دَ (س) = $\frac{١}{٣}$ (٢٧ − ٨ س^{٣})$^{-\frac{٢}{٣}}$ (−٢٤ س^{٢})

= $\frac{-٨ س^{٢}}{\sqrt[٣]{(٢٧ - ٨ س^{٣})^{٢}}}$

دَ (س) = ٠ عندما س = ٠

دَ (س) غير معرفة عند س = $\frac{٣}{٢}$

∴ لا يوجد قيم عظمى أ، صغرى محلية للدالة.

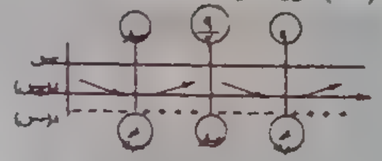
⑦ د (س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٩ س)^{٢}}$

∴ دَ (س) = $\frac{٢}{٣}$ (س^{٢} − ٩ س)$^{-\frac{١}{٣}}$ (٢ س − ٩)

= $\frac{٤ س - ١٨}{٣\sqrt[٣]{س (س - ٩)}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{٩}{٢}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ أ، س = ٩



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند ($\frac{٩}{٢}$ ، $\sqrt[٣]{\frac{٦٥٦١}{١٦}}$)

، للدالة قيمة صغرى محلية عند (٩ ، ٠)

، للدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ٠)

⑧ د (س) = (س − ١)$^{\frac{١}{٣}}$

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س − ١)$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س - ١}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ١

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٠)

⑨ د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ (س − ٤)^{٢}

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ (س − ٤)^{٢}

+ $\sqrt[٣]{س}$ × ٢ (س − ٤)

= (س − ٤) ($\frac{س - ٤}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ + ٢ $\sqrt[٣]{س}$)

= (س − ٤) ($\frac{س - ٤ + ٦ س}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$)

= (س − ٤) ($\frac{٧ س - ٤}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$)

∴ دَ (س) غير معرفة عند س = ٠

، دَ (س) = صفر عندما س = ٤ أ، س = $\frac{٤}{٧}$

∴ الدالة لها قيمة عظمى محلية

عند ($\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٥٧٦}{٤٩}$ $\sqrt[٣]{\frac{٤}{٧}}$)

، الدالة لها قيمة صغرى محلية عند (٤ ، ٠)

⑩ د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٢}$ ، مجال الدالة : [٢ ، ∞[

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س - ٢}}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٢

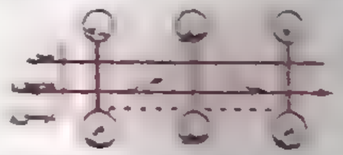
∴ الدالة ليس لها قيم عظمى أ، صغرى محلية.

⑪ د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س^{٢}}$ ، مجال الدالة هو [−٢ ، ٢]

∴ دَ (س) = $\frac{-س}{\sqrt[٣]{٤ - س^{٢}}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠

دَ (س) غير معرفة عند س = ٢ أ، س = −٢



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٢)

⑫ د (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٩}$ ، مجال الدالة ح −]−٣ ، ٣[

∴ دَ (س) = $\frac{س}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٩}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠ ∉ مجال الدالة

دَ (س) غير معرفة عند س = ٣ أ، س = −٣

∴ عند س = −٣ توجد نقطة حرجة (حدية)

، عند س = ٣ توجد نقطة حرجة (حدية)

∴ الدالة ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية

⑬ د (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س^{٢} − ٤)$^{-\frac{٢}{٣}}$ × ٢ س

= $\frac{٢ س}{٣\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٤)^{٢}}}$

، دَ (س) = ٠ منها س = ٠

دَ (س) غير معرفة عند س = ± ٢

للدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، −$\sqrt[٣]{٤}$)

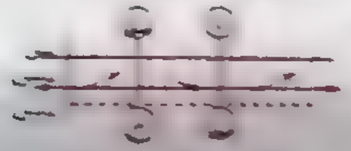
⑭ د (س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ (٢ س − ٥)

∴ دَ (س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ × ٢ + (٢ س − ٥) × $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$

= $\frac{٦ س + ٤ س - ١٠}{٣\sqrt[٣]{س}}$ = $\frac{١٠ س - ١٠}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ١

دَ (س) غير معرفة عند س = ٠



للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٠)

للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، −٣)

⑮ د (س) = س $\sqrt[٣]{س + ٣}$ ، مجال د = [−٣ ، ∞[

∴ دَ (س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ + س × $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س + ٣}}$

= $\frac{٢ س + ٦ + س}{٣\sqrt[٣]{س + ٣}}$ = $\frac{٣ س + ٦}{٣\sqrt[٣]{س + ٣}}$

∴ دَ (س) غير معرفة عند س = −٣

، دَ (س) = صفر عندما س = −٢

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (−٢ ، −٢)

⑯ د (س) = س^{٢} $\sqrt[٣]{س + ٥}$

، مجال الدالة : [−٥ ، ∞[

∴ دَ (س) = س^{٢} × $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س + ٥}}$ + $\frac{\sqrt[٣]{س + ٥} \times ٢ س}{١}$

= $\frac{س^{٢} + ٤ س^{٢} + ١٠ س}{٣\sqrt[٣]{س + ٥}}$

= $\frac{٥ س (س + ٤)}{٣\sqrt[٣]{س + ٥}}$

∴ (س) = عند س = [illegible] ، س = [illegible]

∴ (س) غير معرفة عند س = [illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند ([illegible] ، [illegible])

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند ([illegible] ، [illegible])

(١٢) ∵ (س) = س [illegible] س

∴ مجال الدالة [illegible]

∴ (س) = [illegible]

∴ (س) = عندما س = [illegible] ، س = [illegible]

∴ (س) غير معرفة عند س = [illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند ([illegible] ، [illegible])

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند ([illegible] ، [illegible])

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند ([illegible] ، [illegible])

للدالة قيمة عظمى محلية عند ([illegible] ، [illegible])

للدالة قيمة صغرى محلية عند ([illegible] ، [illegible])

∵ (س) = [illegible] = س [illegible]

∴ (س) = [illegible] س [illegible]

∴ (س) غير معرفة عند س = [illegible]

للدالة قيمة صغرى محلية ، [illegible]

∵ (س) = س [illegible] + [illegible] س − [illegible]

∵ (س) = [illegible] س [illegible] + [illegible]

∴ توجد قيم للمتغير س تجعل ، (س) =

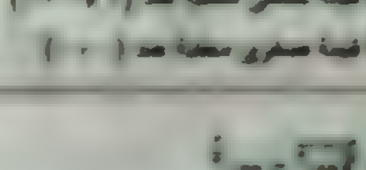
∴ (س) غير معرفة

∴ للدالة لا توجد لها قيم عظمى أو صغرى محلية

---

(١٣) ∵ (س) = [illegible] + [illegible] جتا س عندما ، (س) =

جتا س = [illegible] ، س = [illegible] ، [illegible]



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = [illegible]

∴ ([illegible]) = [illegible]

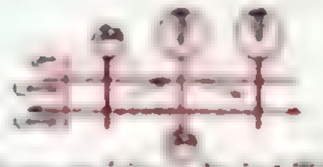
∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = [illegible]

∴ ([illegible]) = [illegible]

(٥) ∵ (س) = ٢ جا س − [illegible] جا س

∴ (س) = عندما جا س = ٢

وهما جا س = [illegible] ، س = [illegible]



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = [illegible]

∴ ([illegible]) = [illegible]

(٦) ∵ (س) = جا س − جتا س

∴ (س) = عندما جا س = ١

وهما س = [illegible] ، [illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = [illegible]

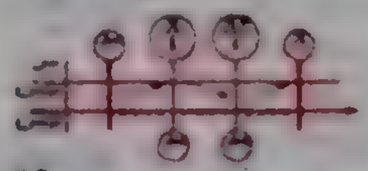
∴ ([illegible]) = [illegible]

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = [illegible]

∴ ([illegible]) = − [illegible]

(٧) ∵ (س) = [illegible] جا ٢س ، ∵ (س) = جا ٢س

∴ (س) = ٠ عندما س = [illegible] ، [illegible]



للدالة قيمة صغرى محلية عند س = [illegible]

∴ ([illegible]) = [illegible]

للدالة قيمة عظمى محلية عند س = [illegible]

∴ ([illegible]) = [illegible]

(٨) ∵ س = جا س (١ + جا س)

س = جا س + جا س جا س

س = جا س + [illegible] جا ٢س

∴ س = جا س + جا ٢س

∴ س′ = − جا س − ٢ جا ٢س

∴ س″ = − جتا س − ٤ جتا ٢س

∴ ٢ جا² س + جا س − ١ = ٠

∴ (٢ جا س − ١) (جا س + ١) = ٠

∴ ٢ جا س − ١ = ٠ ، وهما جا س = [illegible]

∴ س = [illegible] أو جا س + ١ = ٠

وهما جا س = −١ (مرفوض)

∴ ∵ ([illegible]) = − جا [illegible] − ٢ جا [illegible]

= [illegible] < ٠

∴ عند س = [illegible] توجد قيمة عظمى محلية

∴ ∴ ([illegible]) = جا [illegible] + [illegible] جا [illegible]

= [illegible] + [illegible] × [illegible] = [illegible]

∴ القيمة العظمى المحلية = [illegible]

---

(١) ∵ (س) = ١ + س [illegible]

∴ (س) = ١ + س [illegible] = ٢ س + س [illegible]

∴ (س) = ٠ عند س = ٠

للدالة قيمة عظمى محلية ، (٠ ، ١)

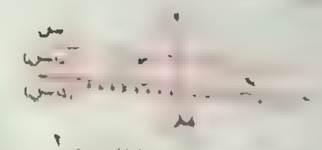
(٢) ∵ (س) = س [illegible] (٢ − س)

∴ (س) = س [illegible] + (٢ − س) [illegible]

= ٢ س [illegible] − س س [illegible]

= (٢ − س) س [illegible]

[illegible] عند س = ٢



للدالة قيمة عظمى محلية د (٢) = هـ^٢

③ د(س) = هـ^س + هـ^-س

دَ(س) = هـ^س - هـ^-س

دَ(س) = ٠ ، منها هـ^س = هـ^-س = ٠

∴ س = ٠

للدالة قيمة صغرى محلية د (٠) = ٢

④ د(س) = س - لو_هـ س ، س > ٠

دَ(س) = ١ - ١/س = (س - ١)/س

دَ(س) = ٠ عند س = ١

للدالة قيمة صغرى محلية د (١) = ١

⑤ د(س) = ٨ لو_هـ س - س^٢ ، س > ٠

دَ(س) = ٨/س - ٢ س ، دَ(س) = ٠

فإن ٨/س - ٢ س = ٠ ، س^٢ = ٤

∴ س = ٢

للدالة قيمة عظمى محلية د (٢) = ٥ ، ١

① د(س) = |س + ٣| - ١

= { س + ٢ ، س ≤ -٣ ؛ -س - ٤ ، س > -٣ }

∵ دَ(-٣^+) = ١ ، دَ(-٣^-) = -١

∴ دَ(-٣) ليس لها وجود.

∴ دَ(س) = { ١ ، س > -٣ ؛ -١ ، س < -٣ }

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = -٣

، د(-٣) = -١

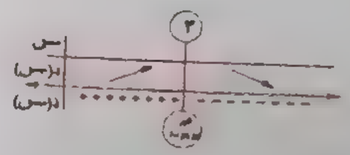
② د(س) = ٥ - |س - ٣|

= { -س + ٨ ، س ≤ ٣ ؛ س + ٢ ، س > ٣ }

∵ دَ(٣^+) = -١ ، دَ(٣^-) = ١

∴ دَ(٣) ليس لها وجود.

∴ دَ(س) = { -١ ، س < ٣ ؛ ١ ، س > ٣ }



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٣

، د(٣) = ٥

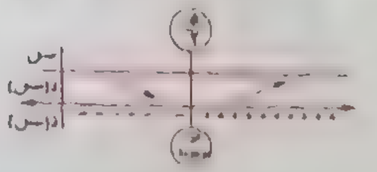
③ د(س) = |٢ س - ٥| + ٤

= { ٢ س - ١ ، س > ٥/٢ ؛ -٢ س + ٩ ، س < ٥/٢ }

∵ دَ(٥/٢^+) = ٢ ، دَ(٥/٢^-) = -٢

∴ دَ(٥/٢) ليس لها وجود.

∴ دَ(س) = { ٢ ، س > ٥/٢ ؛ -٢ ، س < ٥/٢ }



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٥/٢

، د(٥/٢) = ٤

④ د(س) = س |س - ٤|

= { س^٢ - ٤ س ، س ≤ ٤ ؛ -س^٢ + ٤ س ، س > ٤ }

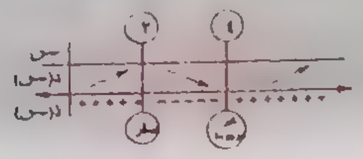
∵ دَ(٤^+) = ٤ ، دَ(٤^-) = -٤

∴ دَ(٤) ليس لها وجود.

∴ دَ(س) = { ٢ س - ٤ ، س > ٤ ؛ -٢ س + ٤ ، س < ٤ }

• عند س > ٤ دَ(س) = ٠ عندما س = ٢ (مرفوض)

• عندما س < ٤ دَ(س) = ٠ عندما س = ٢



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د(٢) = ٤

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٤

، د(٤) = ٠

⑤ د(س) = { [illegible] ؛ [illegible] }

∵ د(٠) = [illegible]

∴ د(٠) = ٠

∴ د(س) = { [illegible] }

، دَ(س) = ٠ عندما س = ٠

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، د(٠) = ٠

⑥ د(س) = { س^٣ - ٣ س^٢ ، س ≤ ٣ ؛ -س^٣ + ٣ س^٢ ، س > ٣ }

دَ(٣^+) = ٩ ، دَ(٣^-) = -٩

∴ دَ(٣) غير موجودة.

∴ دَ(س) = { ٣ س^٢ - ٦ س ، س < ٣ ؛ -٣ س^٢ + ٦ س ، س > ٣ }

عندما س < ٣

دَ(س) = ٠ عندما ٣ س (س - ٢) = ٠

س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٢ (مرفوض)

عندما س > ٣

، -٣ س (س - ٢) = ٠ أ، س = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د(٢) = ٤

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، د(٠) = ٠

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

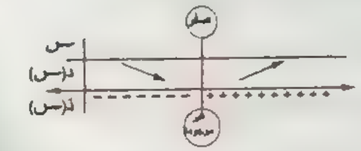
، د(٣) = ٠

١٢

① دَ(٠⁻) = ٠ ، دَ(٠⁺) = ٢ ∴ دَ(٠) غير موجودة.

دَ(س) = { ٢س ، س < ٠ ؛ ٢ ، س > ٠ }

، دَ(س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)

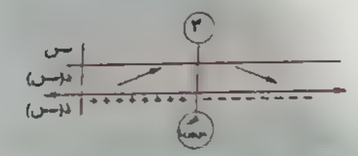


∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ١)

② دَ(٣⁺) = −١ ، دَ(٣⁻) = ١

∴ دَ(٣) غير موجودة.

∴ دَ(س) = { ١ ، س < ٣ ؛ −١ ، س > ٣ }



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٣ ، ٥)

③ دَ(٢⁻) = ٣ ، دَ(٢⁺) = −١

∴ دَ(٢) غير موجودة.

∴ دَ(س) = { ٣ ، س < ٢ ؛ −١ ، س > ٢ }

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ١)

④ دَ(١⁺) = −٦ ، دَ(١⁻) = ٦ ∴ دَ(١) = ٦

دَ(س) = { ٦س ، س ≤ ١ ؛ ٦ ، س > ١ }

، دَ(س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)

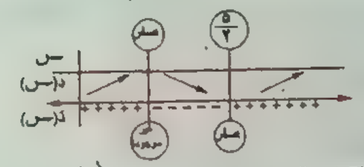
∴ لا يوجد للدالة قيم عظمى أ، صغرى محلية.

⑤ دَ(٠⁻) = ١ ، دَ(٠⁺) = −٥

∴ دَ(٠) غير موجودة.

دَ(س) = { ١ ، س < ٠ ؛ ٢س − ٥ ، س > ٠ }

، دَ(س) = ٠ عندما س = ٥/٢



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٥/٢ ، −٢,٢٥)

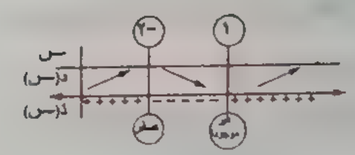
للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٤)

⑥ دَ(١⁻) = −٦ ؛ دَ(١⁺) = ٢

∴ دَ(١) غير موجودة.

دَ(س) = { −٤ − ٢س ، س < ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

، دَ(س) = ٠ عندما س = −٢



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، −٢)

، للدالة قيمة عظمى محلية عند (−٢ ، ٧)

⑦ دَ(١⁻) = ٤ ، دَ(١⁺) = ٢

∴ دَ(١) غير موجودة.

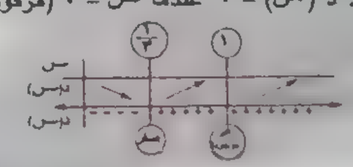
دَ(س) = { ٦س − ٢ ، س < ١ ؛ ٢س ، س > ١ }

• عندما س < ١

∴ دَ(س) = ٠ عندما س = ١/٣

• عندما س > ١

∴ دَ(س) = ٠ عندما س = ٠ (مرفوض)



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (١/٣ ، −١٦/٣)

⑧ دَ(٠⁻) = ٠ ، دَ(٠⁺) = −٢

∴ دَ(٠) غير موجودة.

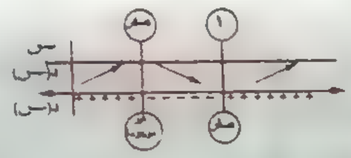
دَ(س) = { ٣س² − ٦س ، س < ٠ ؛ ٢س − ٢ ، س > ٠ }

• عندما س < ٠

دَ(س) = ٠ عند س = ٠ (مرفوض)

أ، س = ٢ (مرفوض)

• عندما س > ٠ دَ(س) = ٠ عند س = ١



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٠)

للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، −١)

١٣

ص = أس³ + ب س² + جـ س + ء

صَ = ٣أس² + ٢ب س + جـ

صً = ٦أس + ٢ب

∵ (٣ ، ٠) ∈ للدالة

∴ ٠ = ٢٧أ + ٩ب + ٣جـ + ء (١)

، (٠ ، ٦) ∈ للدالة ∴ ٦ = ء

، (٢ ، ٢) ∈ للدالة

٢ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ٦ (٢)

، (٢ ، ٢) نقطة حرجة.

∴ دَ(س) = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ١٢أ + ٤ب + جـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ أ = −١ ، ب = ٥ ، جـ = −٨

∴ دً(٢) = −٢ ∴ (٢ ، ٢) نقطة عظمى محلية

١٤

ص = أس³ + ب س² + جـ س + ء

صَ = ٣أس² + ٢ب س + جـ

صً = ٦أس + ٢ب

∵ (−٣ ، ٣) نقطة حرجة.

∴ دَ(س) = ٠ عند س = −٣

٠ = ٢٧أ − ٦ب + جـ (١)

، (−٣ ، ٣) ∈ للدالة

∴ ٣ = −٢٧أ + ٩ب − ٣جـ + ء (٢)

∴ (−١ ، −١) نقطة حرجة

∴ دَ(س) = ٠ عند س = −١

٠ = ٣أ − ٢ب + جـ (٣)

(−١ ، −١) ∈ للدالة

∴ −١ = −أ + ب − جـ + ء (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤)

∴ أ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = ٩ ، ء = ٣

دً(−١) = ٦ (موجب) ∴ نقطة صغرى محلية.

دً(−٣) = −٦ (سالب) ∴ نقطة عظمى محلية.

١٥

ص = أس³ + ب س² + جـ س + ء

صَ = ٣أس² + ٢ب س + جـ

صً = ٦أس + ٢ب

(٠ ، ٠) ∈ للدالة ∴ ٠ = ء

عند س = ٣ نقطة حرجة

∴ ٠ = ٢٧أ + ٦ب + جـ (١)

، ميل المماس = ٤ عند س = ١

∴ ٣أ + ٢ب + جـ = ٤ (٢)

، دالة لها قيمة عظمى محلية عند س = ٠

∴ ٠ = ١٢أ + ٤ب + جـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = ٢/٣ ، ب = −٥ ، جـ = ٠

① (ب) ② (ب) ③ (د) ④ (أ)

إرشادات لحل رقم

① ∵ ص = س^س ∴ لو_هـ ص = س لو_هـ س

∴ $\frac{1}{ص}$ × ص′ = س × $\frac{1}{س}$ + لو_هـ س

= ١ + لو_هـ س

∴ ص′ = ص (١ + لو_هـ س) = س^س (١ + لو_هـ س)

عند نقطة التوقف للدالة يكون ص′ = ٠

∴ س^س (١ + لو_هـ س) = ٠

∴ لو_هـ س = -١ ∴ س = هـ^-١ = $\frac{1}{هـ}$

② ∵ د (س) = س + $\frac{1}{س}$

∴ د′ (س) = ١ - $\frac{1}{س^2}$

بوضع د′ (س) = ٠ ∴ س^٢ = ١

∴ س = ± ١

∴ عند س = -١ توجد قيمة عظمى للدالة

، عند س = ١ توجد قيمة صغرى للدالة

∴ أ = -١ ، ب = ١

∴ د (أ) = د (-١) = -٢ ، د (ب) = د (١) = ٢

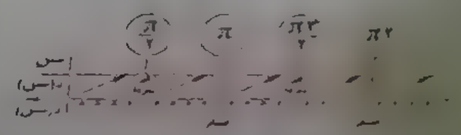
∴ د (أ) < د (ب)

③ ∵ د (س) = طا س - س

∴ د′ (س) = قا^٢ س - ١ = طا^٢ س

بوضع د′ (س) = ٠ ∴ طا^٢ س = ٠

∴ س = ن π حيث ن ∈ ص



∴ الدالة تزايدية على الدوام ولها عدد لا نهائى من النقط الحرجة وليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية.

④ ∵ د (س) = لو_هـ ق (س)

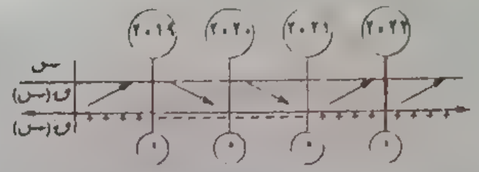
∴ ق (س) = هـ^د (س)

∴ ق′ (س) = هـ^د (س) × د′ (س)

وبوضع ق′ (س) = ٠

∴ د′ (س) = ٠

∴ س = ٢٠١٩ أ، ٢٠٢٠ أ، ٢٠٢١ أ، ٢٠٢٢



∴ عند س = ٢٠١٩ توجد قيمة عظمى للدالة ق (س)

∴ القيمة العظمى المحلية هى د (٢٠١٩)

---

① د (س) = { (س - ٣)(س - ٥) ، س ≤ ٥ ؛ -(س - ٣)(س - ٥) ، ٣ ≤ س < ٥ ؛ (س - ٣)(س - ٥) ، س > ٣ }

∵ د′ (٥^+) = ٢ ، د′ (٥^-) = -٢

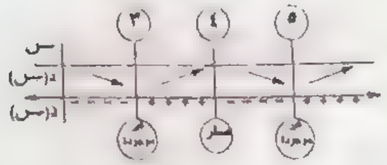
∴ د′ (٥) غير موجودة

، د′ (٣^+) = ٢ ، د′ (٣^-) = -٢

∴ د′ (٣) غير موجودة.

د′ (س) = { ٢ س - ٨ ، س > ٥ ؛ -٢ س + ٨ ، ٣ < س < ٥ ؛ ٢ س - ٨ ، س < ٣ }

، د′ (س) = ٠ عندما س = ٤



∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٤

، د (٤) = + ١

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٥

، د (٥) = ٠

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د (٣) = ٠

② د (س) = { س^٢ - ٤ س + ٣ ، س ≥ ٣ ؛ ٢ س - ٦ ، ٣ < س < ٤ ؛ -س + ٦ ، ٤ ≤ س < ٦ ؛ س - ٦ ، س ≥ ٦ }

د′ (٣^-) = ٢ ، د′ (٣^+) = ٢ ∴ د′ (٣) = ٢

، د′ (٤^-) = ٢ ، د′ (٤^+) = -١

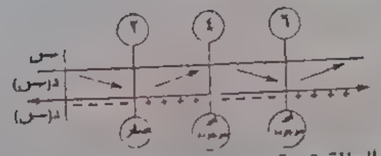
∴ د′ (٤) غير موجودة

، د′ (٦^-) = -١ ، د′ (٦^+) = ١

∴ د′ (٦) غير موجودة.

د′ (س) = { ٢ س - ٤ ، س < ٣ ؛ ٢ ، ٣ ≤ س < ٤ ؛ -١ ، ٤ < س < ٦ ؛ ١ ، س > ٦ }

، د′ (س) = ٠ عندما س = ٢



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٦ ، ٠)

للدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، -١)

للدالة قيمة عظمى محلية عند (٤ ، ٢)

③ د′ (١) = ٣ ، د′ (١^+) = ٠ ∴ د′ (١) غير موجودة.

، د′ (٤) = ٠ ، د′ (٤^+) = ١

∴ د′ (٤) غير موجودة

، د′ (٦^-) = -١ ، د′ (٦^+) = ١

∴ د′ (٦) غير موجودة.

د′ (س) = { ٢ س - ٤ ، س < ٣ ؛ ٢ ، ٣ ≤ س < ٤ ؛ -١ ، ٤ < س < ٦ ؛ ١ ، س > ٦ }

، د′ (س) = ٠ عندما س = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٤

، د (٤) = ٢

للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١ ، د (١) = ٢

لكل س ∈]١ ، ٤[حيث د′ (س) = ٠

هى نقط حرجة عندها قيمة عظمى وصغرى محلية فى نفس الوقت.

④ د′ (-١^-) = -٢ ، د′ (-١^+) = ٠

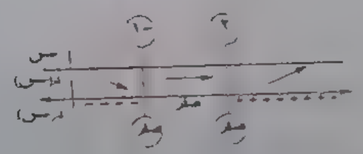
∴ د′ (-١) غير موجودة.

د′ (٢^-) = ٠ ، د′ (٢^+) = ٤

∴ د′ (٢) غير موجودة.

د′ (س) = { ٢ س ، س < -١ ؛ ٠ ، -١ < س < ٢ ؛ ٤ ، س > ٢ }

، د′ (س) = ٠ عندما س ∈]-١ ، ٢[



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = -١

، د (-١) = ٣

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، د (٢) = ٣

لكل س ∈]-١ ، ٢[حيث د′ (س) = ٠

هى نقط حرجة عندها قيمة عظمى وصغرى محلية فى نفس الوقت

بحل المعادلتين

$س^٢ - ٤ س + ٣ = ٨ س - ٢ س^٢ - ٩$

∴ $٣ س^٢ - ١٢ س + ١٢ = ٠$

ومنها س = ٢

$\frac{ءص_١}{ءس} = ٢ س - ٤$ ، $\frac{ءص_٢}{ءس} = ٨ - ٤ س$

$\left(\frac{ءص_١}{ءس}\right)_{(س = ٢)} = ٤ - ٤ = ٠$

$\left(\frac{ءص_٢}{ءس}\right)_{(س = ٢)} = ٨ - ٨ = ٠$

∴ $\left(\frac{ءص_١}{ءس}\right) = \left(\frac{ءص_٢}{ءس}\right)$ عند س = ٢

∴ نقطة التماس هى (٢ ، −١) بالنسبة للدالة $د_١$

∴ للدالة $د_١$ قيمة صغرى محلية عند س = ٢

بالنسبة للدالة $د_٢$

∴ للدالة $د_٢$ قيمة عظمى محلية عند س = ٢

11

① د (س) = $س^٢ - ٦ س + ١٣$

∴ دَ (س) = ٢ س − ٦

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٣ ∈ [−١ ، ٥]

، ∵ د (−١) = ٢٠ ، د (٣) = ٤ ، د (٥) = ٨

∴ القيمة العظمى المطلقة هى ٢٠

وتبلغها الدالة عند س = −١

، القيمة الصغرى المطلقة هى ٤ وتبلغها الدالة عند س = ٣

② د (س) = ٣ − ٥ س − $س^٢$

∴ دَ (س) = −٥ − ٢ س

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{-٥}{٢}$ ∉ [−٤ ، ٣]

، ∵ د (−٤) = ٧ ، د $\left(\frac{-٥}{٢}\right)$ = ٩,٢٥

، د (٣) = −٢١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٩,٢٥

وتبلغها عند س = $\frac{-٥}{٢}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٢١ وتبلغها عند س = ٣

③ ص = $س^٣ - ٩$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^٢$

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ عند س = صفر ∈ [٠ ، ٢]

، ∵ د (٠) = −٩ ، د (٢) = −١

للدالة قيمة عظمى مطلقة = −١ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٩ وتبلغها عند س = صفر

④ د (س) = $س^٤ + ٢$ ∴ دَ (س) = $٤ س^٣$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [−١ ، ٢]

، ∵ د (−١) = ٣ ، د (٠) = ٢ ، د (٢) = ١٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٨ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = صفر

⑤ د (س) = س ($س^٢$ − ١٢) = $س^٣$ − ١٢ س

∴ دَ (س) = $٣ س^٢$ − ١٢

، دَ (س) = ٠

عند س = ٢ ∈ [−١ ، ٤]

أ، س = −٢ ∉ [−١ ، ٤]

، ∵ د (−١) = ١١ ، د (٢) = −١٦

، د (٤) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة = −١٦ وتبلغها عند س = ٢

⑥ د (س) = $س^٣$ − $٣ س^٢$

∴ دَ (س) = $٣ س^٢$ − ٦ س = ٣ س (س − ٢)

، دَ (س) = ٠

عند س = ٠ ∉ [١ ، ٤] ، س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

، ∵ د (١) = −٢ ، د (٢) = −٤

، د (٤) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٤ وتبلغها عند س = ٢

⑦ د (س) = $س^٣$ − $٩ س^٢$ + ٢٤ س − ١

∴ دَ (س) = $٣ س^٢$ − ١٨ س + ٢٤

، دَ (س) = ٠

∴ س = ٤ ∈ [٠ ، ٥] ، س = ٢ ∈ [٠ ، ٥]

، ∵ د (٠) = −١ ، د (٢) = ١٩

، د (٤) = ١٥ ، د (٥) = ١٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٩

وتبلغها عند س = ٢ ، عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = −١ وتبلغها عند س = ٠

⑧ د (س) = $س^٣$ − $٩ س^٢$ + ١٥ س

∴ دَ (س) = $٣ س^٢$ − ١٨ س + ١٥

= ٣ ($س^٢$ − ٦ س + ٥)

، دَ (س) = ٠ عند س = ٥ ∉ [−٢ ، ٤]

أ، س = ١ ∈ [−٢ ، ٤]

، ∵ د (−٢) = −٧٤ ، د (١) = ٧

، د (٤) = −٢٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٧ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٧٤ وتبلغها عند س = −٢

⑨ د (س) = $س^٣$ + $س^٢$ − ٥ س − ٥

∴ دَ (س) = $٣ س^٢$ + ٢ س − ٥

، دَ (س) = ٠

عند س = $\frac{-٥}{٣}$ ∈ [−$\sqrt{٥}$ ، ٠]

أ، س = ١ ∉ [−$\sqrt{٥}$ ، ٠]

، ∵ د (−$\sqrt{٥}$) ، د $\left(\frac{-٥}{٣}\right)$ ، د (٠) = $\frac{٥}{٢٧}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١٢}{٢٧}$ ١ تبلغها عند س = $\frac{-٥}{٣}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٥ تبلغها عند س = ٠

⑩ ص = $٢ س^٣$ + $٣ س^٢$ − ١٢ س + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $٦ س^٢$ + ٦ س − ١٢

٦ ($س^٢$ + س − ٢)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

عند س = −٢ ∉ [١ ، ٥]

أ، س = ١ ∈ [١ ، ٥]

، ∵ د (−١) = ١٤ ، د (١) = −٦ ، د (٥) = ٢٦٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢٦٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٦ وتبلغها عند س = ١

⑪ ص = $٢ س^٣$ + $٣ س^٢$ + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $٦ س^٢$ + ٦ س = ٦ س (س + ١)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ عند س = ٠ ∈ [−١٠ ، ١٢]

، س = −١ ∈ [−١٠ ، ١٢]

، ∵ د (−١٠) = −١٦٩٩ ، د (−١) = ٢

، د (٠) = ١ ، د (١٢) = ٣٨٨٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٨٨٩

وتبلغها عند س = ١٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = −١٦٩٩

وتبلغها عند س = −١٠

⑫ د (س) = (س − ١) ($س − ٢)^٢$

∴ دَ (س) = (س − ١) × ٢ (س − ٢)

+ ($س − ٢)^٢$

= (س − ٢) (٣ س − ٤)

، دَ (س) = ٠

عند س = ٢ ∈ [٠ ، ٥] ، س = $\frac{٤}{٣}$ ∈ [٠ ، ٥]

∵ د (٠) = -٤ ، د ($\frac{٤}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$

، د (٢) = ٠ ، د (٥) = ٣٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٤ وتبلغها عند س = ٠

(١٣) د (س) = ٢ س - ٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$

∴ دَ (س) = ٢ - ٢ س$^{\frac{-١}{٣}}$ = ٢ - $\frac{٢}{\sqrt[٣]{س}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [-١ ، ٢]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د (-١) = -٥ ، د (٠) = ٠ ، د (١) = -١

، د (٢) = ٦ - ٣ × $\sqrt[٣]{٩}$ ≈ -٢٤٫٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = صفر

وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٥ وتبلغها عند س = -١

(١٤) د (س) = ٣ س^{٤} - ٤ س^{٣}

∴ دَ (س) = ١٢ س^{٣} - ١٢ س^{٢}

= ١٢ س^{٢} (س - ١)

، دَ (س) = ٠

عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

، س = ١ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د (-١) = ٧ ، د (٠) = ٠

، د (١) = -١ ، د (٢) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١ وتبلغها عند س = ١

(١٥) د (س) = ٢ س^{٤} - س^{٢} + ١

∴ دَ (س) = ٨ س^{٣} - ٢ س

= ٢ س (٤ س^{٢} - ١)

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [-١ ، ١]

، س = $\frac{١}{٢}$ ∈ [-١ ، ١]

، س = $\frac{-١}{٢}$ ∈ [-١ ، ١]

، ∵ د (-١) = ٢ ، د ($\frac{-١}{٢}$) = $\frac{٧}{٨}$

، د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٧}{٨}$

، د (١) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢

تبلغها عند كل من س = -١ ، س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٧}{٨}$

تبلغها عند كل من س = $\frac{-١}{٢}$ ، س = $\frac{١}{٢}$

---

(١) (أ) (٢) (أ) (٣) (جـ)

(٤) (جـ) (٥) (د)

دَ (س) = أ س + ب

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{-ب}{أ}$

، د (س) = ∫ دَ (س) ءس = $\frac{أ س^{٢}}{٢}$ + ب س + ث

، ∵ أ < ٠ ، د دالة تربيعية

∴ د لها قيمة عظمى مطلقة عند س = $\frac{-ب}{أ}$

---

(١) ص = $\frac{س}{س - ١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س - ١)(١) - س(١)}{(س - ١)^{٢}}$ = $\frac{-١}{(س - ١)^{٢}}$

، $\frac{ءص}{ءس}$ غير معرفة عند س = ١ ∉ [٢ ، ٤]

∴ (ص)$_{س = ٢}$ = ٢ ، (ص)$_{س = ٤}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٤}{٣}$ وتبلغها عند س = ٤

(٢) د (س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{س}$

∴ دَ (س) = $\frac{س (٢ س) - (س^{٢} + ٩)(١)}{س^{٢}}$

= $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٣ ∈ [١ ، ٦]

أ، س = -٣ ∉ [١ ، ٦]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ [١ ، ٦]

، ∵ د (١) = ١٠ ، د (٣) = ٦ ، د (٦) = $\frac{١٥}{٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٠

وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٦ وتبلغها عند س = ٣

(٣) د (س) = $\frac{٤ س}{س^{٢} + ١}$

دَ (س) = $\frac{(س^{٢} + ١)(٤) - (٤ س)(٢ س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

= $\frac{-٤ س^{٢} + ٤}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

∴ دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [-١ ، ٣]

أ، س = -١ ∈ [-١ ، ٣]

، ∵ د (-١) = -٢ ، د (١) = ٢

، د (٣) = $\frac{٦}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٢ وتبلغها عند س = -١

(٤) د (س) = س + $\frac{١}{س + ٢}$

∴ دَ (س) = ١ + $\frac{-١}{(س + ٢)^{٢}}$ ، دَ (س) = ٠

عند س = -١ ∉ [٠ ، ٣] ، س = -٣ ∉ [٠ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند س = -٢ ∉ [٠ ، ٣]

، ∵ د (٠) = $\frac{١}{٢}$ ، د (٣) = ٣$\frac{١}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣$\frac{١}{٥}$ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{١}{٢}$ وتبلغها عند س = ٠

(٥) د (س) = س + $\frac{١}{س}$

∴ دَ (س) = ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [$\frac{١}{٢}$ ، ٣]

، س = -١ ∉ [$\frac{١}{٢}$ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ [$\frac{١}{٢}$ ، ٣]

، ∵ د ($\frac{١}{٢}$) = ٢$\frac{١}{٢}$ ، د (١) = ٢

، د (٣) = ٣$\frac{١}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣$\frac{١}{٣}$

وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١

(٦) د (س) = $\frac{س^{٢} + س + ١}{س^{٢} - س + ١}$

∴ دَ (س)

= $\frac{(س^{٢} - س + ١)(٢ س + ١) - (س^{٢} + س + ١)(٢ س - ١)}{(س^{٢} - س + ١)^{٢}}$

= $\frac{-٢ س^{٢} + ٢}{(س^{٢} - س + ١)^{٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ± ١ ∈ [-٢ ، ٣]

، ∵ د (-٢) = $\frac{٣}{٧}$ ، د (-١) = $\frac{١}{٣}$

، د (١) = ٣ ، د (٢) = $\frac{٧}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{١}{٣}$

وتبلغها عند س = -١

---

(١) د (س) = جا س ∴ دَ (س) = جتا س

، دَ (س) = ٠ ∴ جتا س = ٠

منها س = $\frac{\pi}{٢}$ ∉ [$\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$]

أ، س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∈ [$\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$]

، ∵ د ($\frac{٥\pi}{٦}$) = $\frac{١}{٢}$ ، د ($\frac{٣\pi}{٢}$) = ١

، د $\left(\frac{١١\pi}{٦}\right) = \frac{-١}{٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١}{٢}$

وتبلغها عند س = $\frac{٥\pi}{٦}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = −١

وتبلغها عند س = $\frac{١١\pi}{٦}$

(٢) د (س) = جا س + جتا س

∴ دَ (س) = جتا س − جا س

، دَ (س) = ٠ ∴ جتا س − جا س = ٠

∴ ظا س = ١

س = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ [٠ ، ٢π]

أ، س = $\frac{٥\pi}{٤}$ ∈ [٠ ، ٢π]

، ∵ د (٠) = ١ ، د $\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \sqrt{٢}$

، د $\left(\frac{٥\pi}{٤}\right) = -\sqrt{٢}$ ، د (٢π) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\sqrt{٢}$

وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = $-\sqrt{٢}$

وتبلغها عند س = $\frac{٥\pi}{٤}$

(٣) د (س) = ٢ جا س + جتا ٢ س

∴ دَ (س) = ٢ جتا س − ٢ جا ٢ س

= ٢ جتا س − ٤ جا س جتا س

= ٢ جتا س (١ − ٢ جا س)

، دَ (س) = ٠ عند ٢ جتا س = ٠

ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ، س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ، ١ − ٢ جا س = ٠ ومنها جا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ، س = $\frac{٥\pi}{٦}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

، ∵ د (٠) = ١ ، د $\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{٣}{٢}$

، د $\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ١$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٣}{٢}$ وتبلغها عند س = $\frac{\pi}{٦}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١

وتبلغها عند س = ٠ أ، س = $\frac{\pi}{٢}$

(٤) د (س) = س $هـ^{-س}$

∴ دَ (س) = س $هـ^{-س}$ × −١ + $هـ^{-س}$

= − س $هـ^{-س}$ + $هـ^{-س}$

= $هـ^{-س}$ (١ − س)

، دَ (س) = ٠ ∴ $هـ^{-س}$ (١ − س) = ٠

ومنها س = ١ ∈ [٠ ، ٢]

، ∵ د (٠) = صفر ، د (١) = $\frac{١}{هـ}$ ، د (٢) = $\frac{٢}{هـ^{٢}}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١}{هـ}$ تبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر تبلغها عند س = صفر

(٥) د (س) = ١٠ س $هـ^{-س}$

∴ دَ (س) = ١٠ س $هـ^{-س}$ (−١) + ١٠ $هـ^{-س}$

= ١٠ $هـ^{-س}$ (١ − س)

، دَ (س) = ٠ ∴ ١٠ $هـ^{-س}$ (١ − س) = ٠

∴ س = ١ ∈ [٠ ، ٤]

، ∵ د (٠) = صفر ، د (١) = ١٠ $هـ^{-١}$ = $\frac{١٠}{هـ}$

، د (٤) = $\frac{٤٠}{هـ^{٤}}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١٠}{هـ}$

وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٠ وتبلغها عند س = ٠

(٦) د (س) = س $هـ^{س}$

∴ دَ (س) = س $هـ^{س}$ + $هـ^{س}$ = $هـ^{س}$ (١ + س)

، دَ (س) = ٠ ∴ $هـ^{س}$ (١ + س) = ٠

منها س = −١ ∈ [−٣ ، ١]

، ∵ د (−٣) = $-\frac{٣}{هـ^{٣}}$ ، د (−١) = $-\frac{١}{هـ}$

، د (١) = $هـ$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $هـ$ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{-١}{هـ}$ وتبلغها عند س = −١

(٧) د (س) = $س^{٢}$ $هـ^{-س}$

∴ دَ (س) = $س^{٢}$ $هـ^{-س}$ (−١) + ٢ س $هـ^{-س}$

= س $هـ^{-س}$ (٢ − س)

، دَ (س) = ٠ منها س = ٠ ∈ [−١ ، ٣]

، س = ٢ ∈ [−١ ، ٣]

، ∵ د (−١) = $هـ$ ، د (٠) = صفر

، د (٢) = $\frac{٤}{هـ^{٢}}$ ، د (٣) = $\frac{٩}{هـ^{٣}}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى $هـ$ وتبلغها عند

س = −١

ولها قيمة صغرى مطلقة هى صفر

وتبلغها عند س = صفر

٦

(١) د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ∴ دَ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [٢ ، ٥]

، ∵ د (٢) = ١ ، د (٥) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند

س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ١ وتبلغها عند س = ٢

(٢) د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ∴ دَ (س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [−٨ ، ٨]

، ∵ د (−٨) = −٢ ، د (٠) = ٠ ، د (٨) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٨

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٢ وتبلغها عند س = −٨

(٣) د (س) = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٢}$ $(١٦ - س^{٢})^{\frac{-١}{٢}}$ × −٢ س

= $\frac{-س}{\sqrt{١٦ - س^{٢}}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [−٤ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٤ ∉ [−٤ ، ٣]

، س = −٤ ∈ [−٤ ، ٣]

، ∵ د (−٤) = ٠ ، د (٠) = ٤ ، د (٣) = $\sqrt{٧}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند

س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند

س = −٤

(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}$

∴ دَ (س) = $\frac{٢}{٣}$ $(س - ١)^{\frac{-١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س - ١}}$

، دَ (س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [٠ ، ٩]

، ∵ د (٠) = ١ ، د (١) = ٠ ، د (٩) = ٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٤ وتبلغها عند

س = ٩

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر وتبلغها عند

س = ١

(٥) د (س) = س $\sqrt{١ - س}$

∴ دَ (س) = س × $\frac{-١}{٢\sqrt{١ - س}}$ + $\sqrt{١ - س}$

= $\frac{-س + ٢ - ٢س}{٢\sqrt{١ - س}}$ = $\frac{٢ - ٣س}{٢\sqrt{١ - س}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{٢}{٣}$ ∈ [−١ ، ١]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [−١ ، ١]

، ∵ د (−١) = $-\sqrt{٢}$ ، د $\left(\frac{٢}{٣}\right) = \frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$

، د (١) = صفر

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$ وتبلغها عند

س = $\frac{٢}{٣}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = $-\sqrt{٢}$ وتبلغها عند

س = −١

⑥ د (س) = س − $\sqrt{\text{س}}$

∴ دَ (س) = ١ − $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ = $\frac{٢\sqrt{\text{س}} - ١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{١}{٤}$ ∈ [٠ ، ٩]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [٠ ، ٩]

، ∵ د (٠) = ٠ ، د $\left(\frac{١}{٤}\right) = \frac{-١}{٤}$ ، د (٩) = ٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٦ وتبلغها عند س = ٩

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $\frac{-١}{٤}$ وتبلغها عند س = $\frac{١}{٤}$

⑦ د (س) = $\sqrt{٨\text{س} - \text{س}^٢}$

∴ دَ (س) = $\frac{٨ - ٢\text{س}}{٢\sqrt{٨\text{س} - \text{س}^٢}}$ = $\frac{٤ - \text{س}}{\sqrt{٨\text{س} - \text{س}^٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٤ ∈ [٠ ، ٨]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ أ، ٨

وكل منهما ينتمى للفترة [٠ ، ٨]

، ∵ د (٠) = صفر ، د (٤) = ٤ ، د (٨) = صفر

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى صفر وتبلغها عند س = ٠ ، عند س = ٨

⑧ د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^٢ - ٤}$

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س^٢ − ٤)$^{\frac{-٢}{٣}}$ (٢ س)

= $\frac{٢\text{س}}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^٢ - ٤)^٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = صفر ∈ [−١ ، ٤]

، دَ (س) غير معرفه عند س = ٢ ∈ [−١ ، ٤]

أ، س = −٢ ∉ [−١ ، ٤]

، ∵ د (−١) = − $\sqrt[٣]{٣}$ ، د (٠) = − $\sqrt[٣]{٤}$

، د (٢) = صفر ، د (٤) = $\sqrt[٣]{١٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى $\sqrt[٣]{١٢}$ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $\sqrt[٣]{٤}$ وتبلغها عند س = ٠

⑨ د (س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} - ١}}$

∴ دَ (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ١}\,(١) - \text{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س} - ١}}}{\text{س} - ١}$

= $\frac{٢\text{س} - ٢ - \text{س}}{٢\sqrt{\text{س} - ١}\,(\text{س} - ١)}$ = $\frac{\text{س} - ٢}{٢(\text{س} - ١)\sqrt{\text{س} - ١}}$

، دَ (س) = ٠

عند س = ٢ ∈ [$\frac{٥}{٤}$ ، ٥]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [$\frac{٥}{٤}$ ، ٥]

، د $\left(\frac{٥}{٤}\right) = \frac{٥}{٢}$ ، د (٢) = ٢ ، د (٥) = $\frac{٥}{٢}$

∴ للدالة قيمة صغرى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة عظمى مطلقة هى $\frac{٥}{٢}$ وتبلغها عند س = $\frac{٥}{٤}$ ، ٥

⑩ د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{\text{س} - ٢}}{\text{س}}$

∴ دَ (س) = $\frac{\text{س} \times \frac{١}{٣}(\text{س} - ٢)^{\frac{-٢}{٣}} - \sqrt[٣]{\text{س} - ٢} \times ١}{\text{س}^٢}$

= $\frac{\text{س} - ٣(\text{س} - ٢)}{٣\text{س}^٢\sqrt[٣]{(\text{س} - ٢)^٢}}$

= $\frac{-٢\text{س} + ٦}{٣\text{س}^٢\sqrt[٣]{(\text{س} - ٢)^٢}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ٣ ∈ [١ ، ٤]

، دَ (س) غير معرفه عند س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

أ، س = ٠ ∉ [١ ، ٤]

، ∵ د (١) = −١ ، د (٢) = ٠ ، د (٤) = $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٤}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٤}$ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ١ وتبلغها عند س = ١

⑦

① د (س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣ & ، \text{س} < ١ \\ \text{س}^٢ + ٤ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

، ∵ دَ (١$^+$) = دَ (١$^-$) = ٢ ∴ دَ (١) = ٢

∴ دَ (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{س} < ١ \\ ٢ & \text{س} = ١ \\ ٢\text{س} & \text{س} > ١ \end{cases}$

• فى حالة س > ١ دَ (س) = ٠

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ لا تحقق

، ∵ د (−٢) = −١ ، د (٢) = ٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٨ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −١ وتبلغها عند س = −٢

② د (س) = $\begin{cases} (\text{س} + ٣)^٢ & ، \text{س} < ٠ \\ (\text{س} - ٣)^٢ & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

، ∵ دَ (٠$^+$) ≠ دَ (٠$^-$)

∴ دَ (٠) غير موجودة.

دَ (س) = $\begin{cases} ٢(\text{س} + ٣) & ، \text{س} < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ٠ \\ ٢(\text{س} - ٣) & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

، دَ (س) = ٠ فى حالة س < ٠

∴ ٢ (س + ٣) = ٠

∴ س = −٣ ∉ [−٢ ، ٢]

دَ (س) = ٠ فى حالة س > ٠

∴ ٢ (س − ٣) = ٠

∴ س = ٣ ∉ [−٢ ، ٢]

، ∵ د (−٢) = ١ ، د (٠) = ٩ ، د (٢) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٩ وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ١ وتبلغها عند س = −٢ ، س = ٢

③ د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + \text{س} - ٦ & ، \text{س} \geq ٢ \\ ٥\text{س} - ٦ & \text{س} < ٢ \end{cases}$

، ∵ دَ (٢$^+$) = دَ (٢$^-$) = ٥

∴ دَ (س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ & ، \text{س} > ٢ \\ ٥ & ، \text{س} = ٢ \\ \text{:} & \text{س} < ٢ \end{cases}$

∴ دَ (س) = ٠ فى حالة س > ٢

∴ ٢ س + ١ =

∴ س = $\frac{-١}{٢}$ ∈ [−٢ ، ٢]

، فى حالة س < ٢ : = لا تحقق

، ∵ د (−١) = −٢ ، د $\left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{-٥}{٤}$

، د (٣) = ٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٩ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هى $\frac{-٥}{٤}$ وتبلغها عند س = $\frac{-١}{٢}$

④ د (س) = $\begin{cases} ٥ - \text{س}^٢ & ، \text{س} \geq ٢ \\ \text{س}^٢ - ٣ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

، ∵ دَ (٢$^+$) ≠ دَ (٢$^-$)

∴ دَ (٢) = غير موجودة.

∴ دَ (س) = $\begin{cases} -٢\text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ٢ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

∴ دَ (س) = ٠ فى حالة س < ٢

∴ −٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [−٢ ، ٢]

، دَ (س) = ٠ فى حالة س > ٢

∴ ٢ س = ٠ س = ٠ لا تحقق س > ٢

، د (٢) [illegible] ، د (٠) [illegible]

، د (٢) [illegible] ، د (٣) [illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٥ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٤ وتبلغها عند س = ٣

⑤ د (س) = { س² − ٢ س² ، س ≥ ٠
س² − ٢ س ، س < ٠

، ∵ دَ (٠⁺) ≠ دَ (٠⁻)

∴ دَ (٠) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ٣ س² − ٦ س ، س < ٠
غير موجودة ، س = ٠
٢ س − ٢ ، س > ٠

• عند س < ٠

دَ (س) = ٠

∴ ٣ س² − ٦ س = ٠

∴ س = ٠ لا تحقق أ، س = ٢ لا تحقق

• عند س > ٠

دَ (س) = ٠

∴ ٢ س − ٢ = ٠ منها س = ١ ∈ [−٣ ، ٣]

، ∵ د (−٣) = −٥٤ ، د (صفر) = صفر

، د (١) = −١ ، د (٣) = ٣

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٣ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٥٤ وتبلغها عند س = −٣

⑥ د (س) = { ٣ س² + ١٢ س − ١ ، −١ ≤ س ≤ ٢
٣٧ − س ، ٢ < س ≤ ٣

، ∵ دَ (٢⁺) ≠ دَ (٢⁻)

∴ دَ (٢) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ٦ س + ١٢ ، −١ ≤ س < ٢
غير موجودة ، س = ٢
−١ ، ٢ < س ≤ ٣

، عند س ∈]−١ ، ٢[

دَ (س) = ٠ فإن ٦ س + ١٢ = ٠

∴ س = −٢ ∉]−١ ، ٢[

، عند س ∈]٢ ، ٣[

دَ (س) = ٠ فإن −١ = ٠ (مرفوض)

، ∵ د (−١) = −١٠ ، د (٢) = ٣٥

، د (٣) = ٣٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٣٥ وتبلغها عند س = ٢

، قيمة صغرى مطلقة هى −١٠ وتبلغها عند س = −١

⑦ د (س) = |س| + ٢

= { −س + ٢ ، −١ ≤ س < صفر
س + ٢ ، صفر ≤ س ≤ ٢

، ∵ دَ (٠⁺) ≠ دَ (٠⁻)

∴ دَ (٠) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { −١ ، −١ ≤ س < ٠
غير موجودة ، س = ٠
١ ، ٠ < س ≤ ٢

∴ دَ (س) ≠ ٠

، ∵ د (−١) = ٣ ، د (٠) = ٢ ، د (٢) = ٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٤ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هى ٢ وتبلغها عند س = ٠

⑧ د (س) = ٣ − |س − ١|

= { س + ٢ ، ٠ ≤ س < ١
−س + ٤ ، ١ ≤ س ≤ ٣

، ∵ دَ (١⁺) ≠ دَ (١⁻)

∴ دَ (١) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ١ ، ٠ ≤ س < ١
غير موجودة ، س = ١
−١ ، ١ < س ≤ ٣

∴ دَ (س) ≠ ٠

، ∵ د (٠) = ٢ ، د (١) = ٣ ، د (٣) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١ وتبلغها عند س = ٣

⑨ ∵ د (س) = (س − ٤) |س| فى الفترة [١ ، ٤]

∴ د (س) = س² − ٤ س

∴ دَ (س) = ٢ س − ٤ ، دَ (س) = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ فإن س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

، ∵ د (١) = −٣ ، د (٢) = −٤ ، د (٤) = ٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هى ٠ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هى −٤ وتبلغها عند س = ٢

⑩ د (س) = س |س − ٢|

= { −س (س − ٢) ، ١/٢ ≤ س < ٢
س (س − ٢) ، ٢ ≤ س ≤ ٥/٢

، ∵ دَ (٢⁺) ≠ دَ (٢⁻) ∴ دَ (٢) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { −٢ س + ٢ ، ١/٢ ≤ س < ٢
غير موجودة ، س = ٢
٢ س − ٢ ، ٢ < س ≤ ٥/٢

، دَ (س) = ٠ فى الفترة ١/٢ ≤ س < ٢

∴ −٢ س + ٢ = ٠ منها س = ١

، دَ (س) = ٠ فى الفترة ٢ < س ≤ ٥/٢

∴ ٢ س − ٢ = ٠ منها س = ١ لا تنتمى للفترة

، ∵ د (١/٢) = ٣/٤ ، د (١) = ١

، د (٢) = ٠ ، د (٥/٢) = ٥/٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٥/٤ وتبلغها عند س = ٥/٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٠ وتبلغها عند س = ٢

تمرين عام 12

(أ)

① د (س) = س² − ٤ س + ٢

دَ (س) = ٢ س − ٤

دً (س) = ٢ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب.

② د (س) = (س − ١)²

دَ (س) = ٢ (س − ١)

دً (س) = ٢ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب

③ د (س) = ٤ − ٦ س − ٣ س²

دَ (س) = −٦ − ٦ س

دً (س) = −٦ (سالبة لجميع قيم س)

المنحنى محدب لأعلى ولا توجد نقط انقلاب.

④ ص = ١/٢ س² − ٩ س + ٢

ءص/ءس = س − ٩ ، ء²ص/ءس² = ٢ س

بوضع ء²ص/ءس² = ٠ ← ٢ س = منها س =

المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، [

ومحدب لأسفل فى]∞ ، [

وتوجد نقطة انقلاب فى

⑤ د (س) = [illegible]

دَ (س) = [illegible]

دً (س) = [illegible]

بوضع دً (س) = [illegible]

منها س

المنحنى محدب لأسفل فى [illegible]

ومحدب لأعلى فى [illegible]

ونقطة انقلاب فى [illegible]

⑥ ص = س (س^{٢} − ١) = س^{٣} − س

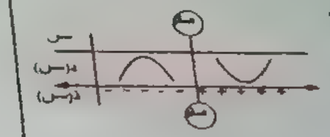
ص′ = ٣ س^{٢} − ١

ص″ = ٦ س

بوضع ص″ = ٠

منها ٦ س = ٠

∴ س = ٠



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل فى]٠ ، ∞[ونقطة الانقلاب (٠ ، ٠)

⑦ د (س) = س^{٣} − س^{٢}

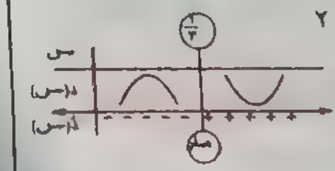
د′ (س) = ٣ س^{٢} − ٢ س

د″ (س) = ٦ س − ٢

بوضع د″ (س) = ٠

منها ٦ س − ٢ = ٠

∴ س = $\frac{١}{٣}$



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، $\frac{١}{٣}$[

المنحنى محدب لأسفل]$\frac{١}{٣}$ ، ∞[

نقطة الانقلاب ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٢٧}$)

⑧ د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩

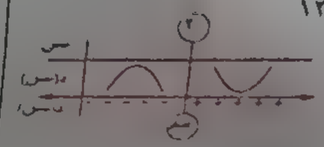
د′ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س

د″ (س) = ٦ س − ١٢

بوضع د″ (س) = ٠

٦ س − ١٢ = ٠

∴ س = ٢



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، ٢[

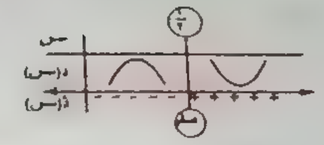
المنحنى محدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

نقطة الانقلاب (٢ ، ١)

⑨ د (س) = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١

د′ (س) = ٦ س^{٢} − ٦ س − ١٢

د″ (س) = ١٢ س − ٦



بوضع د″ (س) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$

المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، $\frac{١}{٢}$[

ومحدب لأسفل فى]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

وله نقطة انقلاب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-١١}{٢}$)

⑩ د (س) = ١٥ س + ٦ س^{٢} − س^{٣}

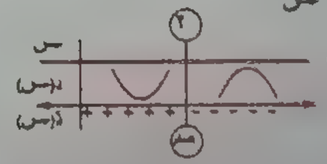
د′ (س) = ١٥ + ١٢ س − ٣ س^{٢}

د″ (س) = ١٢ − ٦ س

بوضع د″ (س) = ٠

١٢ − ٦ س = ٠

∴ س = ٢



المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، ٢[

ومحدب لأعلى فى]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٤٦)

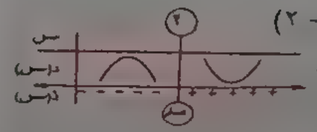
⑪ د (س) = (س − ٢)^{٣} − ١

د′ (س) = ٣ (س − ٢)^{٢}

د″ (س) = ٦ (س − ٢)

بوضع د″ (س) = ٠

منها س = ٢



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٠)

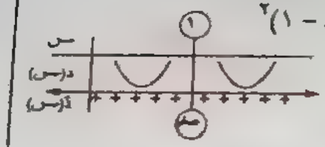
⑫ د (س) = (س − ١)^{٤} + ٣

د′ (س) = ٤ (س − ١)^{٣}

د″ (س) = ١٢ (س − ١)^{٢}

بوضع د″ (س) = ٠

∴ س = ١



المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، ١[

وفى]١ ، ∞[

وليس له نقطة انقلاب.

⑬ د (س) = (س − ١)^{٢} (س − ٢)

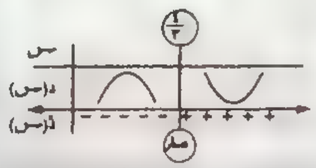
د′ (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ (س − ١) (س − ٢)

د″ (س) = ٢ (س − ١) + ٢ (س − ١)

+ ٢ (س − ٢) = ٢ (٣ س − ٤)

بوضع د″ (س) = ٠

س = $\frac{٤}{٣}$



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، $\frac{٤}{٣}$[

ومحدب لأسفل فى]$\frac{٤}{٣}$ ، ∞[

وله نقطة انقلاب ($\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٢٧}$)

⑭ د (س) = (س^{٢} − ٤)^{٢}

د′ (س) = ٢ (س^{٢} − ٤) × ٢ س

= ٤ س (س^{٢} − ٤)

د″ (س) = ٤ س × ٢ س + ٤ (س^{٢} − ٤)

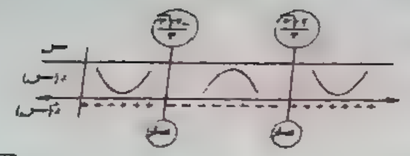
= ٨ س^{٢} + ٤ س^{٢} − ١٦

= ١٢ س^{٢} − ١٦

بوضع د″ (س) = ٠ ∴ ١٢ س^{٢} − ١٦ = ٠

س^{٢} = $\frac{١٦}{١٢}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ س = ± $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ = ± $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$



المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، $\frac{-٢\sqrt{٣}}{٣}$[

وفى]$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ∞[

ومحدب لأعلى فى]$\frac{-٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$[

وله نقطة انقلاب هى

($\frac{-٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$) ، ($\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$)

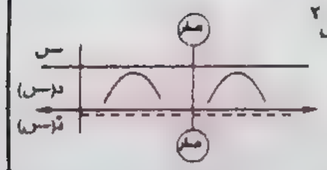
⑮ د (س) = ٤ − س − ٣ س^{٤}

د′ (س) = −١ − ١٢ س^{٣}

د″ (س) = −٣٦ س^{٢}

بوضع د″ (س) = ٠

منها س = ٠



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

ولا يوجد له نقط انقلاب.

⑯ ص = س^{٤} − ٤ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥

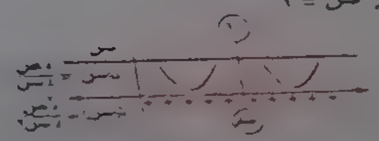
$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ س^{٣} − ١٢ س^{٢} + ١٢ س

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢ س^{٢} − ٢٤ س + ١٢

بوضع $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠

١٢ س^{٢} − ٢٤ س + ١٢ = ٠

∴ س = ١



المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

وليس له نقط انقلاب

(١٧) ∵ ق(س) = س³ − ٦ س² + ٤

∴ ق′(س) = ٣ س² − ١٢ س

∴ ق″(س) = ٦ س − ١٢

بوضع ق″(س) = ٠ ، ٦ س − ١٢ = ٠

س = ٢

التحني مقعر لأسفل في]−∞ ، ٢[

ومقعر لأعلى في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، −١٦)

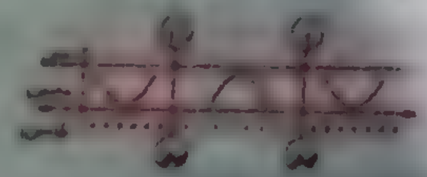
(١٨) ص = س³ − ٦ س²

ص′ = ٣ س² − ١٢ س

ص″ = ٦ س − ١٢

بوضع ص″ = ٠ ، ٦ س − ١٢ = ٠

س = ٢ ، صفرها س = ٠ ، ٢



التحني مقعر لأسفل في]−∞ ، ٢[

ومقعر لأعلى في]٢ ، ∞[

ومقعر لأعلى في]−∞ ، ٠[

وله نقطة انقلاب (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٨)

∵ ق(س) = س³ − ٣ س² + ٤

∴ ق′(س) = ٣ س² − ٦ س

∴ ق″(س) = ٦ س − ٦

بوضع ق″(س) = ٠ ، ٦ س − ٦ = ٠

س = ١

التحني مقعر لأعلى في]−∞ ، ١[

ومقعر لأسفل في]١ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (١ ، ٢)

(٢٠) ∵ ق(س) = س³ − ٤ س² + ٥

∴ ق′(س) = ٣ س² − ٨ س

∴ ق″(س) = ٦ س − ٨

بوضع ق″(س) = ٠ ، ٦ س − ٨ = ٠

س = $\frac{٤}{٣}$

التحني مقعر لأعلى في]−∞ ، $\frac{٤}{٣}$[

ومقعر لأسفل في]$\frac{٤}{٣}$ ، ∞[

وله نقطة انقلاب ($\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٢٧}{٢٧}$)

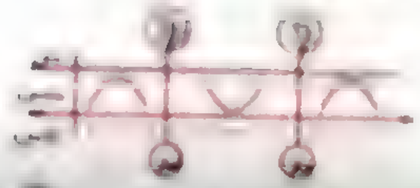
(٢١) ص = $\frac{١}{٤}$ س⁴ − س³

ص′ = س³ − ٣ س²

ص″ = ٣ س² − ٦ س

بوضع ص″ = ٠ ، ٣ س² − ٦ س = ٠

س = ٠ ، ٢



التحني مقعر لأعلى في]−∞ ، ٠[

ومقعر لأسفل في]٠ ، ٢[

ومقعر لأسفل في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٤)

(٢٢) ∵ ق(س) = ٢٠ س² − ٥ س³

∴ ق′(س) = ٤٠ س − ١٥ س²

∴ ق″(س) = ٤٠ − ٣٠ س

∴ ق″(س) = ٠ ∴ ٤٠ − ٣٠ س = ٠

∴ س = $\frac{٤}{٣}$ أو س = ٠

التحني مقعر لأسفل في]−∞ ، $\frac{٤}{٣}$[

[٠ ، $\frac{٤}{٣}$[

ومقعر لأعلى في]$\frac{٤}{٣}$ ، ∞[، [٠

وله نقطة انقلاب ($\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٢٠٠}{٨}$) ، (٠ ، ٠)

(٠ ، $\frac{٢٠٠}{٨}$)

(٢٣) ∵ ق(س) = س³ − $\frac{٩٠}{س}$ ، س ≠ ٠

∴ ق′(س) = ٣ س² + $\frac{٩٠}{س²}$

بوضع ق′(س) = ٠

∴ ق″(س) = ٦ س − $\frac{١٨٠}{س³}$

∴ ق″(س) = ٠ ∴ ٦ س − $\frac{١٨٠}{س³}$ = ٠

∴ س⁴ = ٣٠ ∴ س = ±$\sqrt{٣٠}$

∴ التحني مقعر لأسفل في]−∞ ، −$\sqrt{٣٠}$[

[٠ ، $\sqrt{٣٠}$[

ومقعر لأعلى في]−$\sqrt{٣٠}$ ، ٠[

]$\sqrt{٣٠}$ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (−$\sqrt{٣٠}$ ، −٦$\sqrt{٣٠}$) ، (٠ ، ٠)

(٢٤) ∵ ق(س) = $\frac{س}{س − ٢}$ ، س ≠ ٢

∴ ق′(س) = $\frac{−٢}{(س − ٢)²}$

∴ ق″(س) = $\frac{٤(س − ٢)}{(س − ٢)⁴}$

∴ ق″(س) = ٠ ∴ $\frac{٤(س − ٢)}{(س − ٢)⁴}$ = ٠

∴ س = ٢

∴ التحني مقعر لأسفل في]−∞ ، ٢[

[٢ ، ∞[

ومقعر لأعلى في]−∞ ، ٢[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ١) ، (٠ ، $\frac{٢}{٣}$)

(٢٥) ∵ ق(س) = $\frac{س²}{س}$ ، س ≠ ٠

∴ ق′(س) = $\frac{(٢ س) (س) − (س²) (١)}{س²}$

∴ ق′(س) = ٢ − $\frac{س²}{س²}$ = ١ − $\frac{١}{س²}$ (س ≠ ٠)

$\text{د}(\text{س}) = \frac{١٨}{\text{س}}$ (س ≠ ٠)

$\text{د}'(\text{س})$ غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل في]٠ ، ∞[

وليس للمنحنى نقط انقلاب.

(٤) $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ١}{٢\text{س} - ١}$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{(٢\text{س} - ١)(٢\text{س}) - (\text{س}^٢ - ١)(٢)}{(٢\text{س} - ١)^٢}$

$= \frac{٢\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٢}{(٢\text{س} - ١)^٢}$

$\text{د}''(\text{س}) = \frac{(٢\text{س} - ١)^٢(٤\text{س} - ٢) - (٢\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٢)(٢)(٢\text{س} - ١)(٢)}{(٢\text{س} - ١)^٤}$

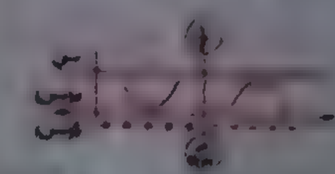
$= \frac{(٢\text{س} - ١)(٤\text{س} - ٢) - (٢\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٢)(٤)}{(٢\text{س} - ١)^٣}$

$= \frac{٨\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٢ - ٨\text{س}^٢ + ٨\text{س} - ٨}{(٢\text{س} - ١)^٣}$

$= \frac{-٦}{(٢\text{س} - ١)^٣}$

$\text{د}''(\text{س})$ غير معرفة عند ٢س − ١ = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∉ المجال



المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، $\frac{١}{٢}$[

ومحدب لأعلى في]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

ولا يوجد للمنحنى نقط انقلاب

(٥) $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٢ - ٣}$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٢ - ٣)(٢\text{س}) - (\text{س}^٢ + ١)(٢\text{س})}{(\text{س}^٢ - ٣)^٢}$

$= \frac{-٤\text{س}}{(\text{س}^٢ - ٣)^٢}$

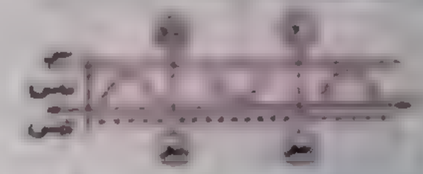
$\text{د}''(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٢ - ٣)^٢(-٤) - (-٤\text{س})(٢)(\text{س}^٢ - ٣)(٢\text{س})}{(\text{س}^٢ - ٣)^٤}$

$= \frac{(\text{س}^٢ - ٣)(-٤) + ١٦\text{س}^٢}{(\text{س}^٢ - ٣)^٣}$

$= \frac{١٢\text{س}^٢ + ١٢}{(\text{س}^٢ - ٣)^٣}$

عندما $\text{د}''(\text{س})$ = ٠ فإن ١٢س^٢ + ١٢ = ٠

∴ س = ±١



المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، −١[،]١ ، ∞[

ومحدب لأسفل في]−١ ، ١[

وله نقط انقلاب هي: (−١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، $\frac{١}{٢}$)

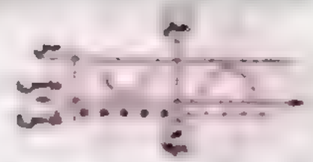
(٦) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٣}}$ ، $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}\text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$

∵ د'(٠) غير معرفة

∴ المماس رأسي عند س = ٠

$\text{د}''(\text{س}) = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{\text{س}^٥}}$

د''(س) غير معرفة عند س = ٠



المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٠[

ومحدب لأعلى في]٠ ، ∞[

نقطة الانقلاب هي (٠ ، ٠)

(٧) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ ، $\text{د}'(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{-\frac{١}{٣}}$

∵ د'(٠) غير معرفة

∴ المماس رأسي عند س = ٠

$\text{د}''(\text{س}) = -\frac{٢}{٩}\text{س}^{-\frac{٤}{٣}}$

د''(س) غير معرفة عند س = ٠

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٠[

∪]٠ ، ∞[ولا يوجد نقط انقلاب

(٨) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{(\text{س} - ٤)^٢} = (\text{س} - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{٢}{٣}(\text{س} - ٤)^{-\frac{١}{٣}}$

∵ د'(٤) غير معرفة

∴ لها مماس رأسي

$\text{د}''(\text{س}) = -\frac{٢}{٩}(\text{س} - ٤)^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{(\text{س} - ٤)^٤}}$

د''(س) غير معرفة عند س = ٤

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[

وليس للمنحنى نقط انقلاب.

(٩) $\text{ص} = \sqrt[٣]{(\text{س} - ٣)^٢} = (\text{س} - ٣)^{\frac{٢}{٣}}$

$\text{ص}' = \frac{٢}{٣}(\text{س} - ٣)^{-\frac{١}{٣}}$

∵ ص' غير معرفة عند س = ٣

∴ الدالة لها مماس رأسي عند س = ٣

∵ $\text{ص}'' = -\frac{٦}{٩}(\text{س} - ٣)^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{-٦}{٢٧\sqrt[٣]{(\text{س} - ٣)^٤}}$

∴ ص'' غير معرفة عند س = ٣

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٣[

ومحدب لأعلى في]٣ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٣ ، ٠)

(١٠) $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - ١|$

$= \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & ، \text{س} \geq ١ \\ -(\text{س}^٢ - ١) & ، \text{س} \leq ١ \end{cases}$

$\text{د}'(١^+) = \lim_{\text{س} \to ١^+} \frac{(\text{س}^٢ - ١) - ٠}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^+} (\text{س} + ١) = ٢$

$\text{د}'(١^-) = \lim_{\text{س} \to ١^-} \frac{-(\text{س}^٢ - ١) - ٠}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^-} (-\text{س} - ١) = -٢$

∴ د'(١) غير موجودة

$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \text{س} > ١ \\ -٢\text{س} & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

$\text{د}''(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & ، \text{س} > ١ \\ -٢ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

• عند س < ١ د''(س) = −٢ ∴ −٢س = ٠

∴ س = ٠ لها مماس وحيد

• عند س > ١ د''(س) = ٢ ∴ ٢س = ٠

∴ س = ٠ لا تحقق

د''(س) غير موجودة عند س = ١

∴ ليس لها مماس وحيد

المنحنى محدب لأعلى في]-١ ، ١[

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، −١[∪]١ ، ∞[

يوجد نقطة انقلاب عند (−١ ، ٠) ، (١ ، ٠)

(١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (د)
(٦) (د) (٧) (ب) (٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (أ)
(١١) (د) (١٢) (أ) (١٣) (ب) (١٤) (د) (١٥) (ب)
(١٦) (ب) (١٧) (ب)

---

(٢)

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢}

النقطة (١ ، ١٢) على المنحنى

∴ د (١) = ١٢ ∴ أ + ب = ١٢ (١)

دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

دً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

عند س = ١ دً (س) = ٠

صفر = ٦ أ + ٢ ب (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) أ = −٦ ، ب = ١٨

---

(٣)

ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س

النقطة (٣ ، −٩) تقع على المنحنى ∴ د (٣) = −٩

−٩ = ٣^{٣} + أ (٣)^{٢} + ب (٣)

٣ أ + ب = −١٢ (١)

صَ = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

صً = ٦ س + ٢ أ ، صً = ٠ عند س = ٣

∴ ٠ = ٦ × ٣ + ٢ أ ∴ منها أ = −٩

بالتعويض في (١) ∴ ب = ١٥

---

(٤)

د (س) = ٢ س + ٥ س

دَ (س) = ٢ + ٥ س

دً (س) = ٥ س

بوضع دً (س) = صفر ∴ منها س = صفر

---

(٥)

د (س) = س (س − ٣)^{٢}

∴ د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩

المنحنى محدب لأسفل في] −π/٢ ، ٠ [

ومحدب لأعلى في] ٠ ، π/٢ [

له نقطة انقلاب هي (٠ ، ٠)

---

(٦)

د (س) = س / (١ − س^{٢})

دَ (س) = [(١ − س^{٢}) (١) − س (−٢ س)] / (١ − س^{٢})^{٢}

= (١ + س^{٢}) / (١ − س^{٢})^{٢}

دً (س) = [(١ − س^{٢})^{٢} (٢ س) − (١ + س^{٢}) (٢ (١ − س^{٢}) × −٢ س)] / (١ − س^{٢})^{٤}

= [(١ − س^{٢}) ((١ − س^{٢}) (٢ س) + ٤ س (١ + س^{٢}))] / (١ − س^{٢})^{٤}

= (٦ س + ٢ س^{٣}) / (١ − س^{٢})^{٣}

دً (س) = ٠ فإن س = صفر

نقطة الانقلاب هي (٠ ، ٠)

الميل عند (٠ ، ٠) = دَ (٠) = ١

∴ قياس الزاوية التي يصنعها المماس = ظا$^{-١}$ (١) = π/٤

---

(٧)

د (س) = س (س − ٣)^{٢}

∴ د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩

∴ دً (س) = ٦ س − ١٢

دَ (س) = صفر عندما س = ٢

∴ عند س = ٢ يوجد نقطة انقلاب

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س = ٣ أو س = ١

، ∵ دً (٣) = ٦ > ٠

∴ عند س = ٣ نقطة قيمة صغرى للدالة

، ∵ دً (١) = −٦ < ٠

∴ عند س = ١ نقطة قيمة عظمى للدالة

∴ س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٣

∴ (س$_{١}$ + س$_{٢}$) / ٢ = (١ + ٣) / ٢ = ٢

= الاحداثي السيني لنقطة الانقلاب.

---

(٨)

دَ (س) = أ س + ب دً (س) = أ < ٠

بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = −ب / أ

عند س = −ب / أ نقطة حرجة دً (−ب / أ) = أ < ٠

∴ منحنى د له قيمة عظمى محلية عند س = −ب / أ

دً (س) = قيمة ثابتة سالبة

لا تساوي صفر لجميع قيم س

لا يوجد نقطة انقلاب للمنحنى

---

(٩)

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

∴ ص = ٢ عندما س = ٠

∴ ٢ = ٠ + ٠ + ٠ + د

∴ د = ٢

، ∵ له مماس أفقي عند

∴ صَ = ٠ عند س = ٠

∴ ٠ = ٣ أ + ٢ ب

∴ ٣ أ + ٢ ب = ٠

∴ ٣ أ + ٢ ب = ٠

∴ ٣ أ = −٢ ب

∴ أ / ب = −٢ / ٣

---

(١٠)

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

∴ ص = ٢ عندما س = ٠

∴ ٢ = ٠ + ٠ + ٠ + د

، ∵ له مماس أفقي عند

∴ صَ = ٠ عند س = ٠

∴ ٠ = ٣ أ + ٢ ب

∴ ٣ أ + ٢ ب = ٠

∴ ٣ أ + ٢ ب = ٠

∴ أ / ب = −٢ / ٣

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ ص = ٤ عندما س = ٢

∴ ٤ = ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ٢

∴ ٤ أ + ٢ ب + جـ = ١ (٣)

بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣)

∴ أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٩ ، ء = ٢

١٣

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

د′ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

د″ (س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (١ ، ٢)

∴ د″ (١) = صفر ∴ ٦ أ + ٢ ب = ٠

∴ ب = −٣ أ (١)

∵ المنحنى له قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤)

∴ د′ (٢) = ٠ ∴ ١٢ أ + ٤ ب + جـ = ٠

ومن (١) ∴ ١٢ أ − ١٢ أ + جـ = ٠

∴ جـ = ٠ (٢)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ د (١) = ٢ ∴ أ + ب + جـ + ء = ٢

ومن (١) ، (٢) ∴ أ − ٣ أ + ء = ٢

∴ −٢ أ + ء = ٢ (٣)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ د (٢) = ٤ ∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء = ٤

ومن (١) ، (٣) ∴ ٨ أ − ١٢ أ + ٠ + ء = ٤

∴ −٤ أ + ء = ٤ (٤)

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) ∴ أ = ١ ، ء = ٠

∴ ب = ٣

∴ معادلة المنحنى هي د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢}

١٤

∵ هي دالة من الدرجة الثالثة

∴ د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

حيث أ ، ب ، جـ ، ء مقادير ثابتة

د′ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

د″ (س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠) ∴ د (١) = ٠

∴ ٠ = أ + ب + جـ + ء (١)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ١) ∴ د (٢) = ١

∴ ١ = ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء (٢)

∵ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ١) = $\frac{٣}{٤}$

∴ جـ′ = $\frac{٣}{٤}$ عند س = ٢

$\frac{٣}{٤}$ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ (٣)

∵ (٢ ، ١) نقطة انقلاب جـ″ = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ١٢ أ + ٢ ب (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نستنتج أن

أ = $\frac{٥}{٤}$ ، ب = −١٥ ، جـ = $\frac{٩٧}{٤}$ ، ء = −١٦

معادلة المنحنى

د (س) = $\frac{٥}{٤}$ س^{٣} − ١٥ س^{٢} + $\frac{٩٧}{٤}$ س − ١٦

١٥

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩ س + ١

د′ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + ٩

د″ (س) = ٦ أ س + ٢ ب

د″ (س) = ٠ عند س = ١ ، س = ٣

∴ د″ (١) = ٣ أ + ٢ ب + ٩ = ٠

٣ أ + ٢ ب = −٩ (١)

د″ (٣) = ٢٧ أ + ٦ ب + ٩ = ٠

٩ أ + ٢ ب = −٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) أ = ١ ، ب = −٦

∴ معادلة المنحنى هي

د′ (س) = س^{٢} − ٢ س + ٢ س − ٢

∴ د′ (س) = ٢ (١) س + ٢ (−٢) = ٢ س − ٤

∴ د″ (س) = ٢ س − ٢

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب في (٢ ، ٣)

١٦

د (س) = $\begin{cases} ٢ س^{٢} + ٤ س & ، س \le ١ \\ ٣ س - س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$

∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ الدالة متصلة

∴ د (١) = د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$)

٢ + ٤ ب = ٣ − ١ ∴ ٤ ب = −٢

د′ (س) = $\begin{cases} ٤ س + ٤ & ، س \le ١ \\ ٣ - ٢ س & ، س > ١ \end{cases}$

∵ د′ (١) = د′ (١$^{+}$)

٤ + ٤ = ٣ − ٢ ∴ ٤ = ١ ∴ ب = −٢

د′ (١$^{-}$) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (١ + هـ) - د (١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٤ (١ + هـ) + ٤ - (٤ + ٤)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٤ هـ + ٤ - ٤ - ٤}{هـ}$ = ٤

د′ (١$^{+}$) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (١ + هـ) - د (١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٣ - ٢ (١ + هـ) - (٤ + ٤)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٣ - ٢ هـ - ٢ - ٤ + ٣}{هـ}$ = −٢

∴ د′ (١) غير موجودة.

د′ (س) = $\begin{cases} ٤ & ، س < ١ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ١ \\ -٢ & ، س > ١ \end{cases}$

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ١[

ومحدب لأسفل في]١ ، ∞[

له نقطة انقلاب في (١ ، ٣)

١٧

(أ) د (س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، س \le ١ \\ س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$

د′ (−١) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (-١ + هـ) - د (-١)}{هـ}$

د′ (−١) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{(-١ + هـ)^{٣} - (-١)^{٣}}{هـ}$

= ٣

د′ (−١) ≠ د′ (−١$^{+}$)

∴ د′ (−١) غير موجودة

د′ (س) = $\begin{cases} ٣ (س + ١)^{٢} & ، س < -١ \\ ٢ س & ، س > -١ \end{cases}$

∴ لا يوجد مماس عند س = −١

د″ (س) = $\begin{cases} ٦ (س + ١) & ، س < -١ \\ ٢ & ، س > -١ \end{cases}$

د″ (س) = ٠ ∴ ٦ (س + ١) = ٠

س = −١

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[

ومحدب لأعلى]١ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (١ ، ٢)

ميل المماس عندها = ٦ (١) − ٢ (١)^{٢} = ٣

معادلته $\frac{\text{ص}}{\text{س}} - \frac{٢}{١} = ٢$

٢ س − ص − ١ = ٠

② د (س) = { س² − ٤ ، س < −٢ ؛ س³ − ٣ س + ٢ ، س ≥ −٢ }

د′(−٢⁻) = نهـا_{هـ ← ٠} (هـ − ٢)² − ٤ − ٠ / هـ = −٤

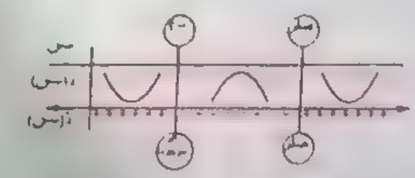
د′(−٢⁺) = نهـا_{هـ ← ٠} (هـ − ٢)³ − ٣ (هـ − ٢) + ٢ − ٠ / هـ = ٩

د′(−٢⁻) ≠ د′(−٢⁺) ليس له مماس عند س = −٢

د′(س) = { ٢ س ، س < −٢ ؛ ٣ س² − ٣ ، س > −٢ }

د″(س) { ٢ ، س < −٢ ؛ ٦ س ، س > −٢ }

د″(س) = ٠ ٦ س = ٠ منها س = ٠



المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، −٢[،]٠ ، ∞[

ومحدب لأعلى فى]−٢ ، ٠[

يوجد نقطة انقلاب (٠ ، ٢)

ويوجد مماس عند هذه النقطة ميله د′(٠) = −٣

معادلة المماس هى $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٠} = \frac{-٣}{١}$

منها ٣ س + ص − ٢ = ٠

③ د (س) = { س³ − ٣ س ، س < ٠ ؛ ٤ س − س² ، س ≥ ٠ }

د′(٠⁻) = نهـا_{هـ ← ٠} (هـ³ − ٣ هـ − ٠) / هـ = −٣

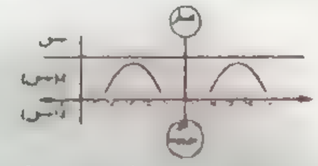
د′(٠⁺) = نهـا_{هـ ← ٠} (٤ هـ − هـ² − ٠) / هـ = ٤

د′(٠) ≠ د′(٠⁺)

د′(س) = { ٣ س² − ٣ ، س < ٠ ؛ ٤ − ٢ س ، س > ٠ }

د″(س) = { ٦ س ، س < ٠ ؛ −٢ ، س > ٠ }

د″(س) = ٠ ٦ س = ٠ ∴ س = ٠



المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

لا يوجد نقطة انقلاب.

١٧

① (ب) ② (جـ) ③ (ب)

④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

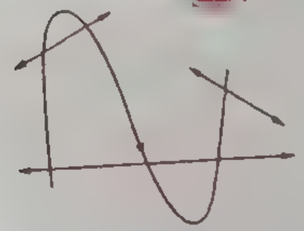
١٨

① (جـ) ② (ب) ③ (أ)

④ (د) ⑤ (د)

إرشادات لحل رقم ١٨

①



من الرسم نلاحظ أن عدد النقط التى يتقاطع فيها منحنى الدالة مع أى مستقيم لا يتجاوز الثلاث نقاط.

② ∵ منحنى الدالة يكون مقعرًا لأسفل أى أنه محدب لأعلى

، ∵ د″(س) = ٢ (أ − ٢) س + ٣

، د″(س) = ٢ (أ − ٢)

وبوضع د″(س) < ٠

∴ أ − ٢ < ٠ ∴ أ < ٢

③ ∵ د (س) = ق (س) − ر (س)

∴ د′(س) = ق′(س) − ر′(س)

∴ د′(٢) = ق′(٢) − ر′(٢) = صفر

، ∵ د″(س) = ق″(س) − ر″(س)

∴ د″(٢) = ق″(٢) − ر″(٢) < صفر

∴ الدالة لها قيمة صغرى محلية عند س = ٢

④ ∵ نهـا_{هـ ← ٠} (د (س + هـ) − د (س)) / هـ = د′(س)

«من تعريف المشتقة»

، ∵ د′(س) > صفر لجميع قيم س ∈ ح

∴ منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل.

⑤ ∵ د′(س₂) > د′(س₁) عندما س₂ > س₁

لكل س₁ ، س₂ ∈]أ ، ب[

∴ د′(س) دالة تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

∴ مشتقتها موجبة

∴ د″(س) > ٠ لكل س ∈]أ ، ب[

∴ منحنى الدالة د محدب لأسفل.

١٩

س² ص + أ ص + ب س² = ٠ (١)

بالتفاضل بالنسبة إلى س

س² ص′ + ٢ س ص + أ ص′ + ٢ ب س = ٠ (٢)

بالتفاضل بالنسبة إلى س

س² ص″ + ٢ س ص′ + ٢ س ص′ + ٢ ص

+ أ ص″ + ٢ب = ٠

(س² + أ) ص″ + ٤ س ص′ + ٢ ص + ٢ ب = ٠ (٣)

النقطة (١ ، −١) تحقق المعادلة (١) وعندها ص″ = ٠

من (١) : −١ − أ + ب = ٠ ∴ أ = ب − ١

من (٢) : −٢ + ص′ (١ + أ) + ٢ ب = ٠

ص′ = ٢ (١ − ب) / (١ + أ)

من (٣)

٠ + ٤ × ١ × ٢ (١ − ب) / (١ + أ) + ٢ × −١ + ٢ ب = ٠

بالتعويض عن ١ + أ = ب ثم التبسيط ينتج

ب² − ٥ ب + ٤ = ٠

(ب − ١) (ب − ٤) = ٠

∴ ب = ١ أ ، ب = ٤

ومنها أ = ٠ أ ، أ = ٣

٢٠

نفرض أن د (س) = أ س³ + ب س² + جـ س + ء

يمر المنحنى بالنقط (١ ، ٦) ، (−١ ، ٢)

∴ د (١) = أ + ب + جـ + ء = ٦ (١)

د (−١) = − أ + ب − جـ + ء = ٢ (٢)

د′(س) = ٣ أ س² + ٢ ب س + جـ

له نقطة حرجة عند (−١ ، ٢)

∴ د′(−١) = ٣ أ − ٢ ب + جـ = صفر (٣)

له نقطة انقلاب عند س = −٢/٣

∴ د″(س) = ٦ أ س + ٢ ب

د″(−٢/٣) = −٤ أ + ٢ ب = ٠ (٤)

بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج أن

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ١ ، ء = ٢

دالة المنحنى

د (س) = س³ + ٢ س² + س + ٢

د′(س) = ٣ س² + ٤ س + ١

د″(س) = ٦ س + ٤

د″(س) = ٠ عند س = −١/٣ ، −١

د″(−١/٣) > ٠ ∴ النقطة (−١/٣ ، ٥٠/٢٧) صغرى محلية.

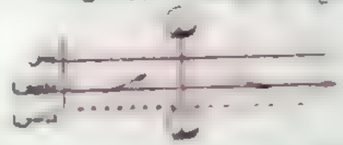
د″(−١) < ٠ ∴ النقطة (−١ ، ٢) عظمى محلية.

[illegible]

(١) ∵ د(س) = ٢ س^{٢} ∴ د′(س) = ٤ س

، د″(س) = ٤

• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ٠



∵ د″(س) = ٤ ≠ ٠

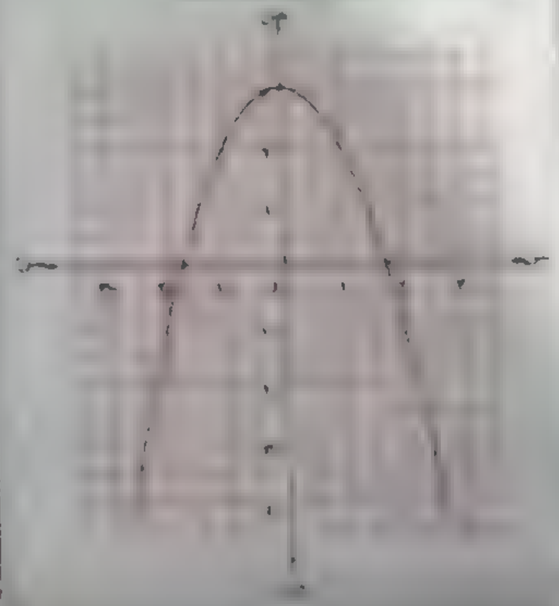
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠ ∴ س = ± $\sqrt{٣}$

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = ٣

س	$-\sqrt{٣}$	٠	$\sqrt{٣}$
د(س)	٠	٣	٠

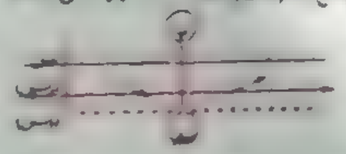


(٢) د(س) = س^{٢} − ٦ س + ٥

∴ د′(س) = ٢ س − ٦

، د″(س) = ٢

• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ٣



∵ د″(س) = ٢ ≠ ٠

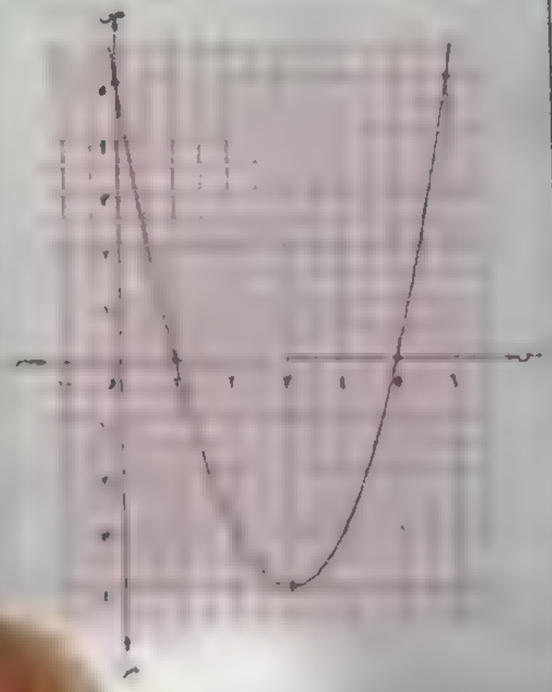
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠ ∴ س = ٥ أو ١

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = ٥

س	٠	١	٣	٥	٦
د(س)	٥	٠	−٤	٠	٥



(٣) د(س) = ١٢ س − س^{٣}

∴ د′(س) = ١٢ − ٣ س^{٢} ، د″(س) = −٦ س

• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ± ٢

• بوضع د″(س) = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

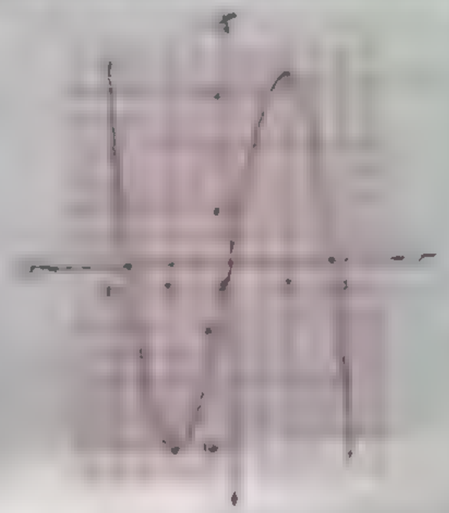
نضع د(س) = ٠

∴ س = ٠ ، ± ٢ $\sqrt{٣}$

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د(٠) = ٠

س	$-٢\sqrt{٣}$	−٢	٠	٢	$٢\sqrt{٣}$
د(س)	٠	١٦	٠	−١٦	٠



(٤) د(س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١٢ س − ٨

∴ د′(س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١٢

• بوضع د′(س) = ٠ ∴ س = ٢

• بوضع د″(س) = ٠ ∴ س = ٢

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د(س) = ٠

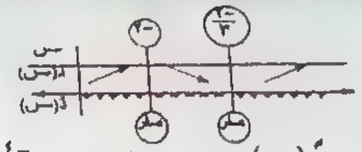
∴ س = ٢ ، ٢ ± $\sqrt{٢}$

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

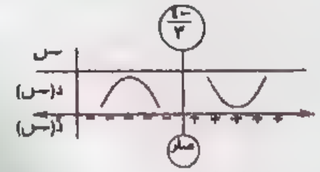
نضع س = ٠ ∴ د(٠) = −٨

س	$-٢\sqrt{٢}$	−٢	٠	٢	$٢\sqrt{٢}$
د(س)	٠	٨	−٨	٠	٨

* بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س = $\frac{-٢}{٣}$ ، -٢



* بوضع دً(س) = ٠ ∴ س = $\frac{-٤}{٣}$



* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات :

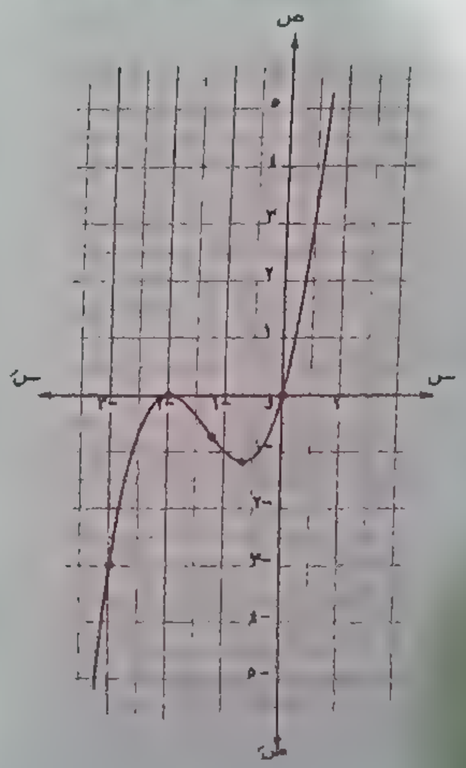
نضع د (س) = ٠ ∴ س = ٠ ، ١ ، = -٢

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات :

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

* نعين نقطة مساعدة : د (-٣) = -٣

س	-٣	-٢	$\frac{-٤}{٣}$	$\frac{-٢}{٣}$	٠
د (س)	-٣	٠	$\frac{-١٦}{٢٧}$	$\frac{-٣٢}{٢٧}$	٠

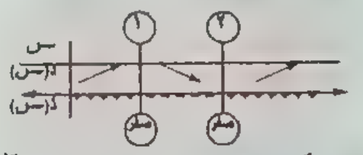


⑥ د (س) = ٢ س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٢ س - ٢

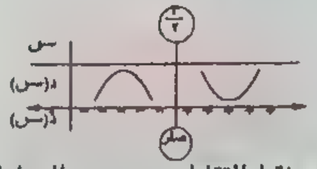
∴ دَ(س) = ٦ س^{٢} - ١٨ س + ١٢

، دً(س) = ١٢ س - ١٨

* بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س = ١ ، ٢



* بوضع دً(س) = ٠ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

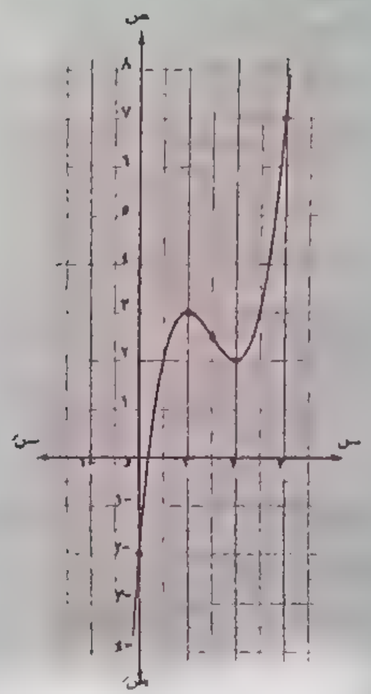


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

* نعين نقطة مساعدة د (٣) = ٧

س	٠	١	$\frac{٣}{٢}$	٢	٣
د (س)	-٢	٣	$\frac{٥}{٢}$	٢	٧

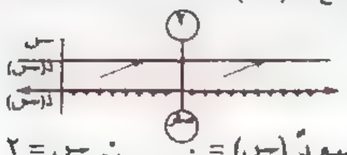


⑦ د (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١٢ س - ٥

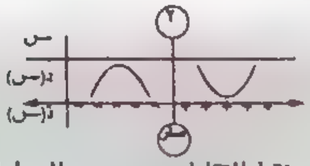
∴ دَ(س) = ٣ س^{٢} - ١٢ س + ١٢

، دً(س) = ٦ س - ١٢

* بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س = ٢



* بوضع دً(س) = ٠ ∴ س = ٢

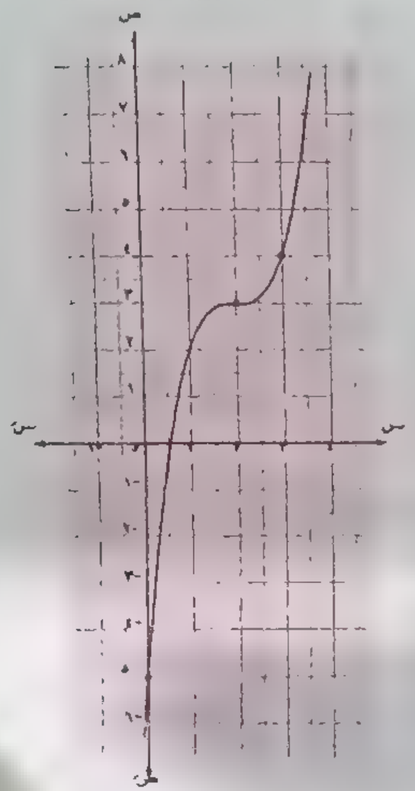


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = -٥

* نعين نقطة مساعدة : د (٣) = ٤

س	٠	٢	٣
د (س)	-٥	٣	٤



⑧ د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س^{٢} - ٢ س + ١

∴ دَ(س) = س^{٢} - ٢ س - ٢

، دً(س) = ٢ س - ٢

* بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س = -١ أ، ٢

* بوضع دً(س) = ٠ ∴ س = ١

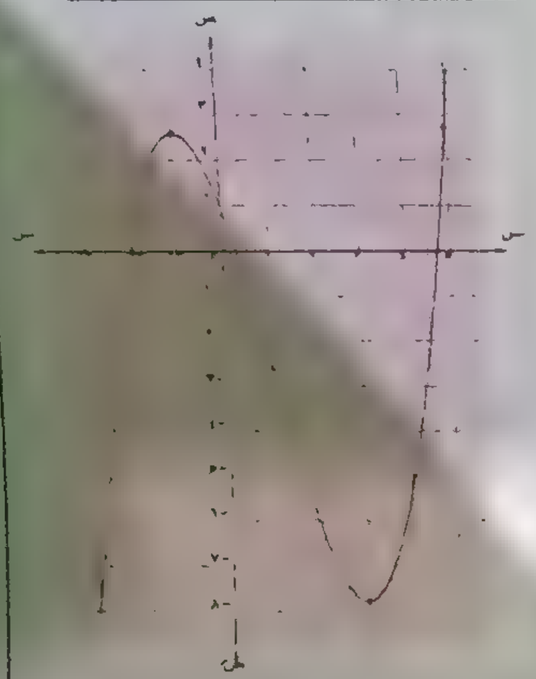
* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ١

* نعين نقط مساعدة : د (-٣) = -٨

، د (٥) = $\frac{٨}{٣}$

س	-٣	-١	١	٣	٥
د (س)	-٨	$\frac{٨}{٣}$	$\frac{-٨}{٣}$	-٨	$\frac{٨}{٣}$



(٩) د (س) = (٢ − س) (س + ١)^{٢}

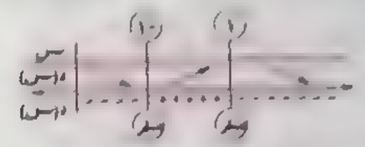
∴ دَ (س) = (٢ − س) × ٢ (س + ١)

+ (−١) (س + ١)^{٢}

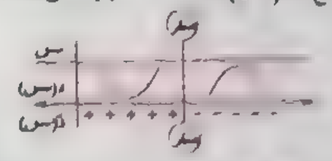
= (−٣ س + ٣) (س + ١)

، دَ(س) = (−٣ س + ٣) + −٣ (س + ١) = −٦ س

* بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −١ أ، ١



* بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠



* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

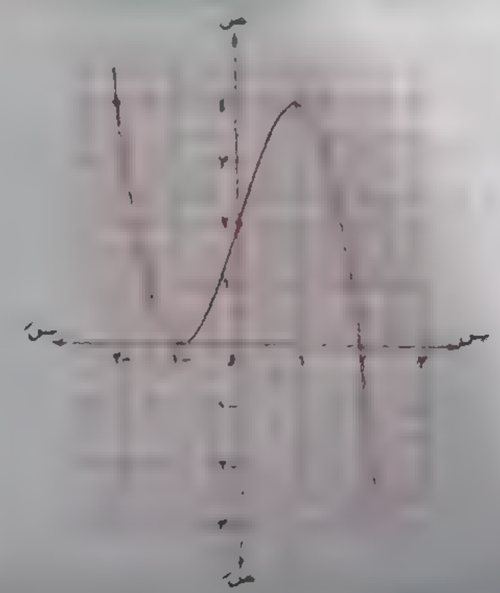
∴ د (س) = ٠ ∴ س = ٢ أ، −١

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

* نعين نقطة مساعدة د (−٢) = ٤

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	٤	٠	٢	٤	٠



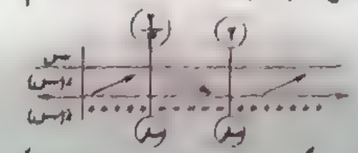
(١٠) د (س) = س (س − ٢)^{٢} + ٢

= س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٤ س + ٢

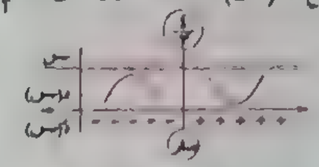
∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٨ س + ٤

، دً (س) = ٦ س − ٨

* بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = $\frac{٢}{٣}$ ، ٢



* بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = $\frac{٤}{٣}$

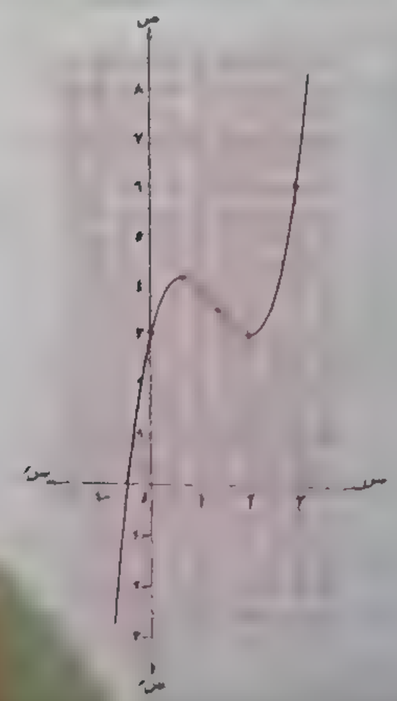


* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

* نعين نقطة مساعدة . د (٣) = ٦

س	٠	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٤}{٣}$	٢	٣
د (س)	٢	$\frac{١١٣}{٢٧}$	$\frac{٩٧}{٢٧}$	٢	٦



(١١) د (س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤) (س − ٢)^{٢}

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤) × ٢ (س − ٢)

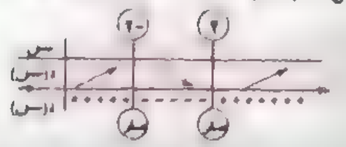
+ $\frac{١}{٨}$ (س − ٢)^{٢}

= $\frac{٣}{٨}$ (س − ٢) (س + ٢)

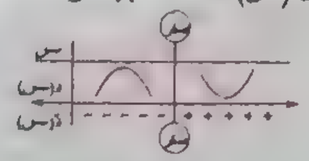
= $\frac{٣}{٨}$ (س^{٢} − ٤)

∴ دً (س) = $\frac{٣}{٤}$ س

* بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ± ٢



* بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠



* لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

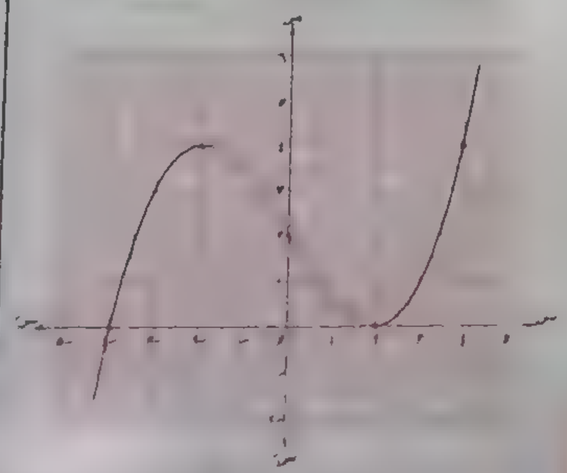
نضع د (س) = ٠ ∴ س = −٤ أ، ٢

* لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

* نعين نقطة مساعدة د (٤) = ٤

س	−٤	−٢	٠	٢	٤
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤



(١٢) د (س) = س | س − ٤ |

= { −س^{٢} + ٤ س ، س < ٤
{ س^{٢} − ٤ س ، س ≥ ٤

، ∵ دَ (٤$^{+}$) ≠ دَ (٤$^{-}$)

∴ دَ (س) = { −٢ س + ٤ ، س < ٤
{ غير موجودة ، س = ٤
{ ٢ س − ٤ ، س > ٤

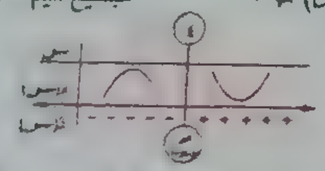
، دً (س) = { −٢ ، س < ٤
{ غير موجودة ، س = ٤
{ ٢ ، س > ٤

* بوضع دَ (س) = ٠

أولاً س < ٤ ∴ س = ٢

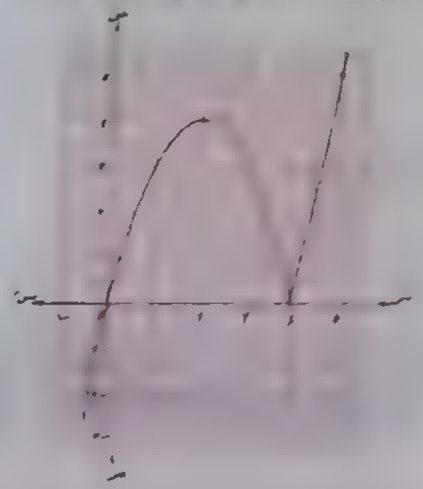
ثانيًا س > ٤ ∴ س = ٢ مرفوض

* دً (س) ≠ ٠ لجميع قيم س



* نعين نقط مساعدة د (٠) = ٠ ، د (٥) = ٥

س	٠	٢	٤	٥
د (س)	٠	٤	٠	٥



(١٢) د (س) = { س^{٢} − ٢ س^{٢} ، س > ٠
س^{٢} − ٢ س ، س ≤ ٠

∵ دَ (٠$^{-}$) ≠ دَ (٠$^{+}$) ∴ دَ (٠) غير موجودة.

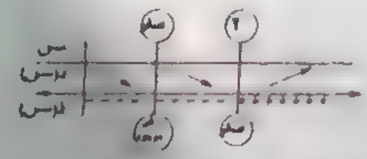
∴ دَ (س) = { ٣ س^{٢} − ٦ س ، س > ٠
غير موجودة ، س = ٠
٢ س − ٢ ، س < ٠

، دً (س) = { ٦ س − ٦ ، س > ٠
غير موجودة ، س = ٠
٢ ، س < ٠

• بوضع دَ (س) = ٠

أولاً عند س > ٠ ∴ س = ٢

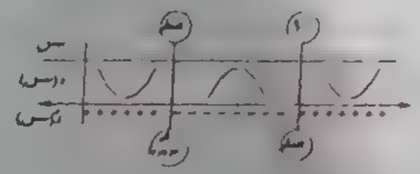
ثانيًا س < ٠ لا يوجد



• بوضع دً (س) = ٠

عند س > ٠ ∴ س = ١

عند س < ٠ لا يوجد



• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ، عند س > ٠ ∴ س = ٣

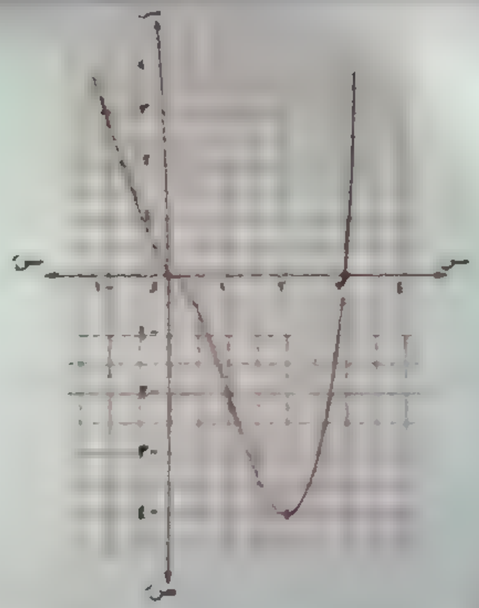
، عند س ≤ ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

• نعين نقطة مساعدة د (−١) = ٣

س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	٣	٠	−٢	−٤	٠

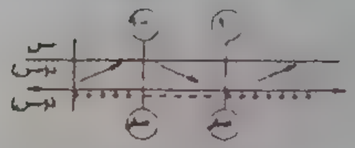


هـ = س^{٣} − ٣ س + ٤

∴ هـَ = ٣ س^{٢} − ٣

، هـً = ٦ س

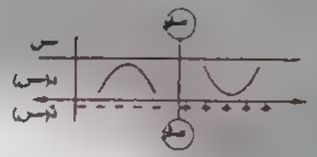
• بوضع هـَ = ٠ ∴ س = ± ١



∴ د متزايدة في]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة في]−١ ، ١[

• بوضع هـً = ٠ ∴ س = ٠

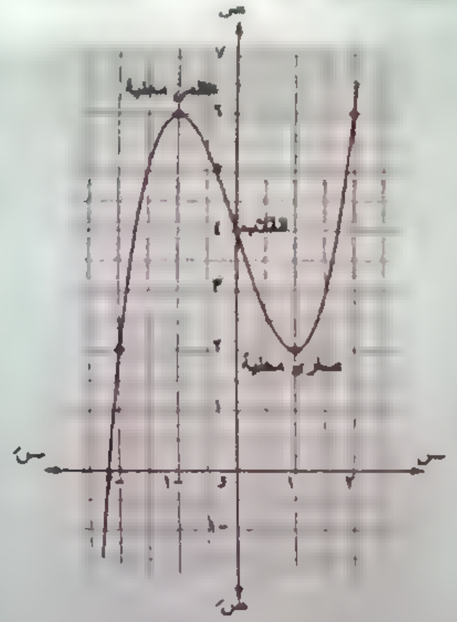


• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ هـ = ٤

• نعين نقط مساعدة د (٢) = ٢ ، د (٣) = ٦

س	٢	١	٠	١	٢
د (س)	٢	٦	٤	٢	٦



د (س) = (س + ١) (س^{٢} − س − ٢)

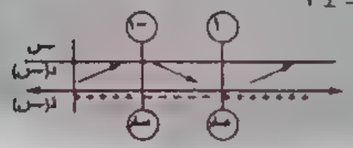
∴ دَ (س) = (س + ١) (٢ س − ١)

+ (س^{٢} − س − ٢)

= ٣ س^{٢} − ٣

، دً (س) = ٦ س بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ± ١



∴ توجد قيمة عظمى محلية د (−١) = صفر

كما توجد قيمة صغرى محلية

د (١) = −٤

بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٠

∴ توجد نقطة انقلاب (٠ ، −٢)

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

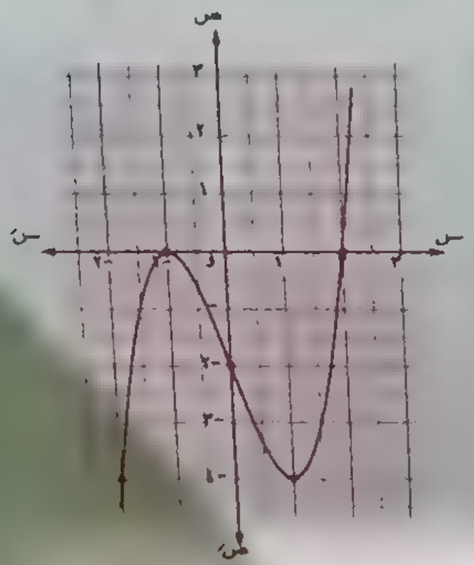
نضع د (س) = ٠ ∴ س = −١ ، ٢

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = −٢

• نعين نقطة مساعدة : د (−٢) = −٤

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	−٤	٠	−٢	−٤	٠



د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س

، دً (س) = ٦ س − ٦

• بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ٠ ، أو س = ٢

∴ توجد قيمة عظمى محلية د (٠) = ٤

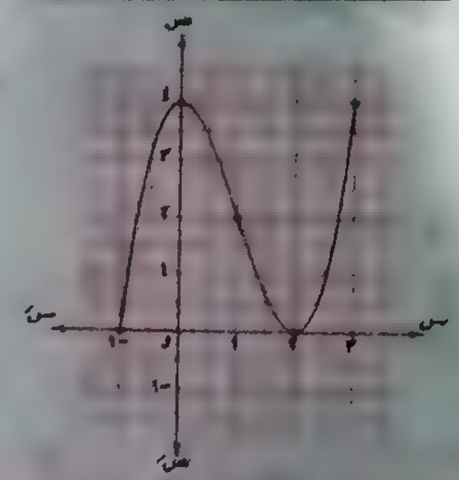
، قيمة صغرى محلية د (٢) = ٠

• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ١

توجد نقطة انقلاب هى (١ ، ٢)

• تعين نقط مساعدة . د (−١) = ٠ ، د (٣) = ٤

س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤



٥

ص = س³ + س² + س

∴ صَ = ٣ س² + ٢ س + ١

، صً = ٦ س + ٢

• بوضع صَ = ٠

٣ س² + ٢ س + ١ = ٠

ليس لها قيمة فى ح تحققها

∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية

• بوضع صً = ٠ ∴ س = $\frac{-١}{٣}$

∴ ($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{-٧}{٢٧}$) نقطة انقلاب

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

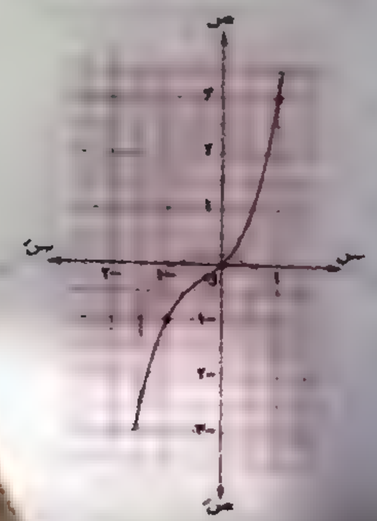
نضع د (س) = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

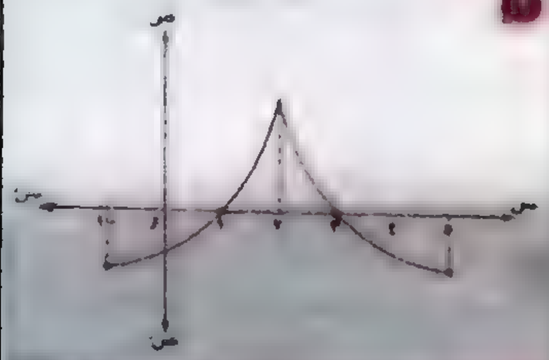
نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

• تعين نقطة مساعدة : د (−١) = −١ ، د (١) = ٢

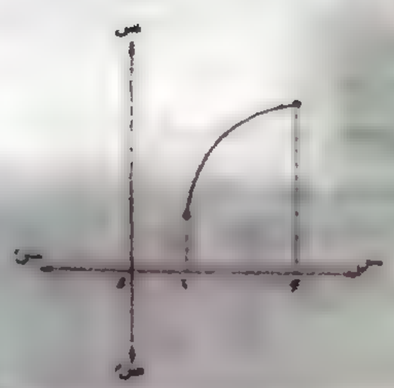
س	−١	$\frac{-١}{٣}$	٠	١
ص	−١	$\frac{-٧}{٢٧}$	٠	٢



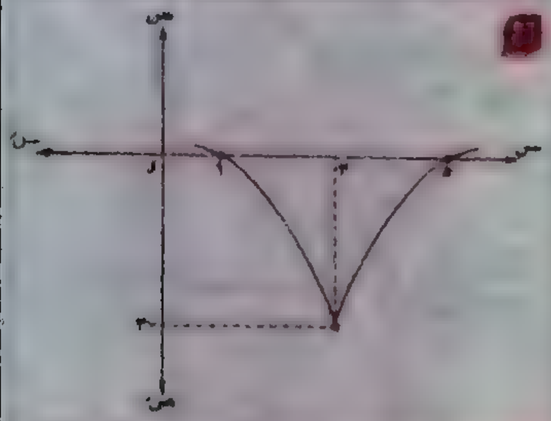
٦



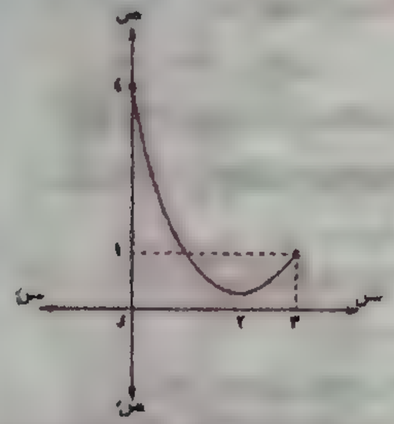
٧



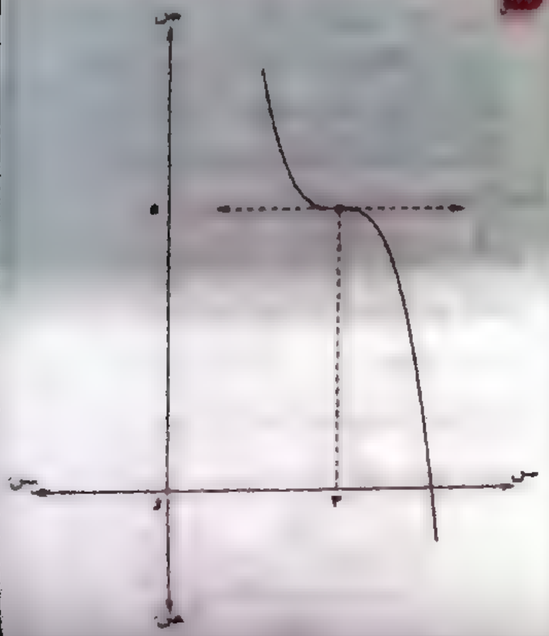
٨



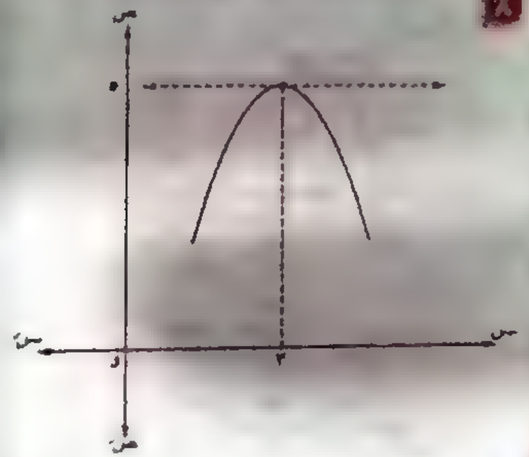
٩



١٠



١١



١٨

ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س

∴ ص$'$ = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

∴ ص$''$ = ٦ س + ٢ أ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (-١ ، ١١)

∴ ١١ = -١ + أ - ب ∴ أ - ب = ١٢ (١)

، ∵ توجد نقطة انقلاب عند س = -١

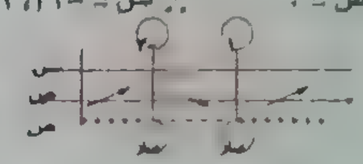
∴ صفر = ٦ (-١) + ٢ أ ∴ أ = ٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب = -٩

∴ معادلة المنحنى : ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٩ س

∴ ص$'$ = ٣ س^{٢} + ٦ س - ٩

، بوضع ص$'$ = ٠ ∴ س = -٣ أ، ١



∴ عند س = -٣

قيمة عظمى محلية

∴ النقطة (-٣ ، ٢٧) نقطة قيمة عظمى محلية

، عند س = ١ قيمة صغرى محلية

∴ النقطة (١ ، -٥) نقطة قيمة صغرى محلية

، ص$''$ = ٦ س + ٦

، بوضع ص$''$ = ٠ ∴ س = -١

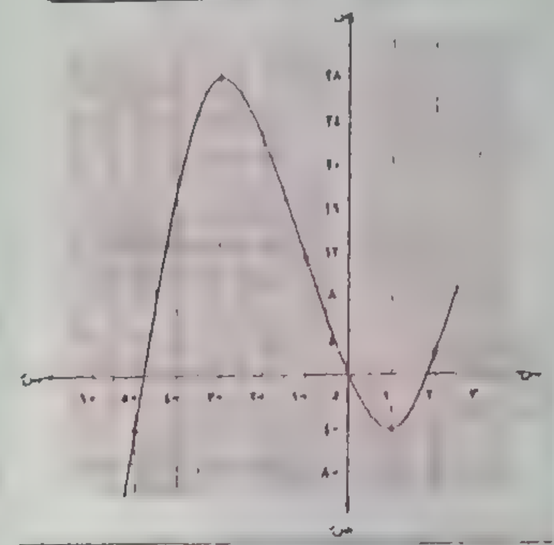
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

• نعين نقط مساعدة : عند س = ٢ فإن : ص = ٢

، عند س = -٥ فإن ص = -٥

س	-٥	-٣	-١	١	٢
د (س)	-٥	٢٧	١١	-٥	٢



١٩

د (س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٤

∴ د$'$ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

، د$''$ (س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ د$'$ (س) = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ٣ (٢)^{٢} + ٢ أ (٢) + ب

∴ ٤ أ + ب = -١٢ (١)

، د$''$ (س) = ٠ عند س = ١

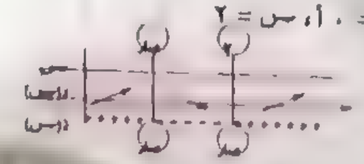
∴ ٠ = ٦ (١) + ٢ أ ∴ أ = -٣ (٢)

من (١) ، (٢) : فإن : ب = ٠

∴ د (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٤

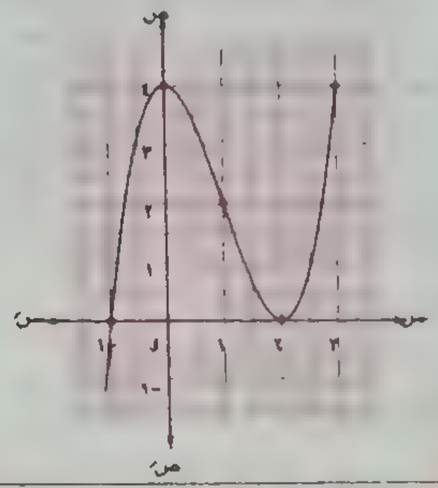
بوضع د$'$ (س) = ٠ ∴ ٣ س^{٢} - ٦ س = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٢



• نوجد نقط مساعدة د (-١) = ٠ ، د (٣) = ٤

س	-١	٠	١	٢	٣
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤



٢٠

د (س) = { س + ١ ، س < ١ ؛ (س - ٣)^{٢} - ٢ ، س ≥ ١ }

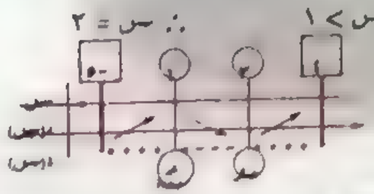
، ∵ د$'$ (١$^{-}$) ≠ د$'$ (١$^{+}$)

∴ د$'$ (س) = { ١ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ (س - ٣) ، س > ١ }

، د$''$ (س) = { ٠ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

، د$'$ (س) = ٠ عند س < ١ لا تحقق

، عند س > ١ ∴ س = ٣

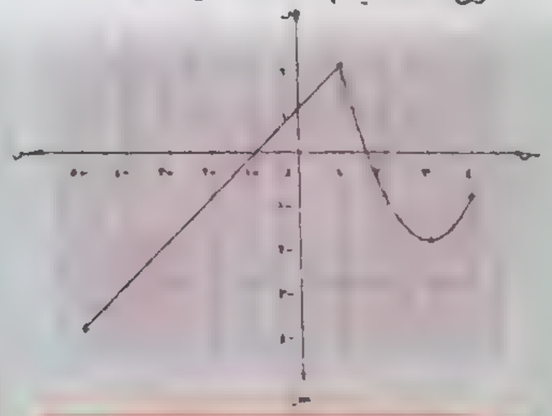


، ∵ د$''$ (٣) = موجبة (صغرى)

س	-٥	١	٢	٤
د (س)	-٤	٢	-٢	-١

∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمتها ٢ عند س = ١

، صغرى مطلقة قيمتها -٤ عند س = -٥



ثانيا

(ب) تمثل الدالة د (س) ، (جـ) تمثل الدالة د$'$ (س) ، (أ) تمثل الدالة د$''$ (س)

٢

① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (ب) ⑤ (ب)

٣

① (د) ② (أ)

٤

① د متزايدة فى]-٣ ، ١[، ومتناقصة فى]-∞ ، -٣[،]١ ، ∞[

②]-∞ ، -١[

٥

① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (جـ)

٦

① محدب لأعلى فى]-٣ ، ١[ومحدب لأسفل فى]١ ، ٥[

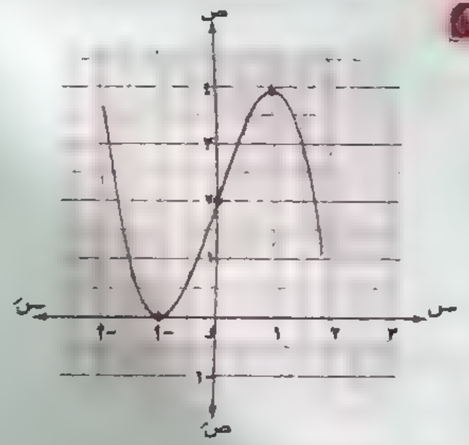
② لها نقطة انقلاب عند س = ١

لأن د$''$ (١$^{-}$) سالبة ، د$''$ (١$^{+}$) موجبة

، د$''$ (١) موجودة

① (د) ② (د) ③ (د)

① (ب) ② (ب) ③ (د) ④ (د)



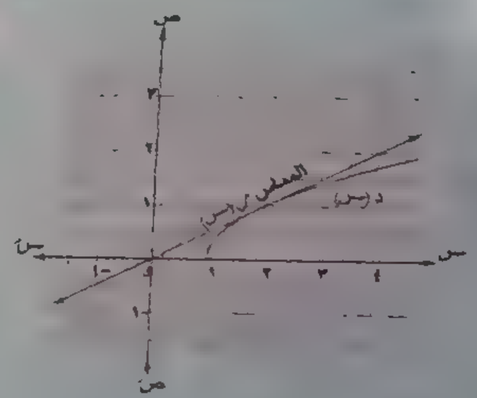
① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (د)

① (جـ) ② (جـ) ③ (د) ④ (د)

إرشادات لحل رقم

① من الرسم نجد أن المماس دائما مرسوم أعلى منحنى الدالة ص = د (س) أى أن ر (س) ≤ د (س)



② ∵ د (س) = ٣ س^{٢} + ٤ أ س + ب دالة من الدرجة الثانية الأحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى هى $\frac{-٤ أ}{٢ \times ٣} = \frac{-٢ أ}{٣}$

ومن الرسم نجد أن الأحداثى السينى لرأس المنحنى يساوى ٢

∴ $\frac{-٢ أ}{٣}$ = ٢ ∴ أ = -٣

، ∵ د َ (٢) = -١

∴ ١٢ - ٢٤ + ب = -١ ∴ ب = ١١

∴ د (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١١ س + ١

∴ د (١) = ٧

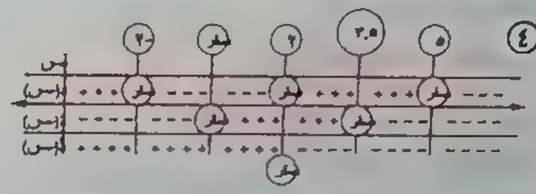
③ ∵ د َ (س) = ميل المماس = ١

، ∵ د (س) > د َ (س)

∴ د (س) > ١ وذلك يتحقق لكل س > ٢

أى : س ∈]٢ ، ∞[

④



لاحظ أن د (س) ، د َ (س) ، د ً (س) لهم نفس الاشارة لكل س ∈]٥ ، ∞[

إجابات باب س 14

نفرض أن أحد العددين هو س

∴ العدد الآخر هو ٣٠ - س

نفرض أن حاصل ضربهما ص = س (٣٠ - س)

= ٣٠ س - س^{٢}

ص َ = ٣٠ - ٢ س

نفرض أن ص َ = ٠ ∴ س = ١٥

ص ً = -٢ لجميع قيم س

∴ ص عند س = ١٥ لها قيمة عظمى

العددان هما ١٥ ، ٣٠ - ١٥ = ١٥

نفرض أن العددين هما س ، ١٦ - س

∴ مجموع مربعيهما ص = س^{٢} + (١٦ - س)^{٢}

= ٢ س^{٢} - ٣٢ س + ٢٥٦

∴ ص َ = ٤ س - ٣٢ ∴ ص ً = ٤

بوضع ص َ = ٠ ∴ س = ٨

(ص ً)$_{س = ٨}$ = ٤ (موجبة)

∴ عند س = ٨ لها قيمة صغرى

∴ العددان هما ٨ ، ٨

نفرض أن العددين هما س ، $\frac{٣٦}{س}$

∴ مجموعهم ص = س + $\frac{٣٦}{س}$ = س + ٣٦ س$^{-١}$

∴ ص َ = ١ - ٣٦ س$^{-٢}$ ∴ ص ً = ٧٢ س$^{-٣}$

∴ ص َ = ٠ عندما ١ - ٣٦ س$^{-٢}$ = ٠

∴ س^{٢} = ٣٦ ∴ س = ± ٦

عند س = ٦ ∴ ص ً > ٠ قيمة صغرى

عند س = -٦ ∴ ص ً < ٠ قيمة عظمى

∴ أصغر ما يمكن عند س = ٦

∴ العددان ٦ ، ٦

نفرض أن العددين هما س ، ٥ - س

حيث س < ٥ - س

∴ س < $\frac{٥}{٢}$ ∴ ص = س^{٢} + ٢ (٥ - س)^{٢}

∴ ص َ = ٢ س^{٢} + ٤ (٥ - س) (-١)

= ٢ س^{٢} + ٤ س - ٢٠

∴ ص ً = ٦ س + ٤

بوضع ص َ = صفر ∴ ٢ س^{٢} + ٤ س - ٢٠ = ٠

س = ٢ أو $\frac{-١٠}{٣}$ (مرفوض)

(ص ً)$_{س = ٢}$ = ٦ × ٢ + ٤ = ١٦ (موجبة)

∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٢

∴ العددان هما ٢ ، ٣

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى س ، ب ، حـ

∴ أكبرها حـ = ٢ س

∴ س + ب + ٢ س = ٣٦

∴ ب = ٣٦ - ٣ س

حاصل ضربهم :

ص = س × ب × حـ = س × (٣٦ - ٣ س) × ٢ س

= ٧٢ س^{٢} - ٦ س^{٣}

ص َ = ١٤٤ س - ١٨ س^{٢} = ١٨ س (٨ - س)

ص ً = ١٤٤ - ٣٦ س

بوضع ص َ = ٠

∴ ١٨ س (٨ - س) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٨

(ص ً)$_{س = ٨}$ = -١٤٤

∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٨

الأعداد هى ٨ ، ١٢ ، ١٦

نفرض أن الأعداد س ، ٣ س ، ع

مجموعها س + ٣ س + ع = ٣٦

∴ ع = ٣٦ - ٤ س

مجموع مربعاتها

ص = س^{٢} + (٣ س)^{٢} + (٣٦ - ٤ س)^{٢}

[illegible]

[illegible]

[illegible]

عند س = ١ حاصل الضرب أكبر ما يمكن

س = ٢ ، زوج المرونة هو (٢ ، ٢)

٥

نفرض أن النقطة على الصورة (س ، ص)

المسافة ف

ف = $\sqrt{(\text{س} - ٠)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢}$

$\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٤\text{ص} + ٤}$

∴ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٨$

ف = $\sqrt{\text{س}^٢ + ٨ + \text{س}^٢ - ٤\text{ص} + ٤}$

= $\sqrt{٢\text{س}^٢ - ٤\text{ص} + ١٢}$

$\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ = $\frac{٤\text{س} - ٤}{٢\sqrt{٢\text{س}^٢ - ٤\text{ص} + ١٢}}$

$\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ = ٠ عندما س = ١

عند س = ١ قيمة صغرى محلية

$\text{س}^٢ + ٨ - ١ = ٩$ ∴ س = ٣

النقطة هي (٣ ، ١) ، (٣ ، ١)

٦

نفرض أن النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى

ص = $\frac{١}{٢}$ $\text{س}^٢$ + ١

المسافة (س ، $\frac{١}{٢}$ $\text{س}^٢$ + ١)

البعد بين النقطة والمستقيم

ف = $\frac{|\text{س} + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + ١ - ٢|}{\sqrt{١ + ١^٢}}$

ف = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $|\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} - ١|$

$\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} - ١$ موجبة لجميع قيم س

∴ ف = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ($\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} - ١$)

∴ $\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (س + ١)

بوضع ف = ٠ ، س = -١

البعد أقل ما يمكن عند س = -١

أصغر بعد هو (الجذر ٢) = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ وحدة طول

٧

نفرض أن النقطة على الصورة (س ، ص)

المسافة ف

ف = $\sqrt{(\text{س} - ٠)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢}$

$\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٤\text{ص} + ٤}$

∴ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٨$

ف = $\sqrt{\text{س}^٢ + ٨ + \text{س}^٢ - ٤\text{ص} + ٤}$

= $\sqrt{٢\text{س}^٢ - ٤\text{ص} + ١٢}$

$\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ = $\frac{٤\text{س} - ٤}{٢\sqrt{٢\text{س}^٢ - ٤\text{ص} + ١٢}}$

$\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ = ٠ عندما س = ١

عند س = ١ قيمة صغرى محلية

$\text{س}^٢ + ٨ - ١ = ٩$ ∴ س = ٣

النقطة هي (٣ ، ١) ، (٣ ، ١)

٨

نفرض أن النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى

ص = $\frac{١}{٢}$ $\text{س}^٢$ + ١

النقطة (س ، $\frac{١}{٢}$ $\text{س}^٢$ + ١)

البعد بين النقطة والمستقيم

ف = $\frac{|\text{س} + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + ١ - ٢|}{\sqrt{١ + ١^٢}}$

ف = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $|\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} - ١|$

$\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} - ١$ موجبة لجميع قيم س

∴ ف = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ($\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} - ١$)

∴ $\frac{\text{ف}}{\text{س}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (س + ١)

بوضع ف = ٠ ، س = -١

البعد أقل ما يمكن عند س = -١

أصغر بعد هو (الجذر ٢) = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ وحدة طول

٩

نفرض أن أبعاد المستطيل س سم

، ص سم

المساحة (م)

م = س × ص = س × $\frac{٩٠ - \text{س}}{٢}$

م = $\frac{٩٠\text{س} - \text{س}^٢}{٢}$

$\frac{\text{م}}{\text{س}}$ = $\frac{٩٠ - ٢\text{س}}{٢}$ بوضع $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ = ٠

٩٠ - ٢س = ٠ ، س = ٤٥

$\frac{\text{م}}{\text{س}}$ < ٠ عندما س > ٤٥

س = ٤٥ تجعل قيمة م قيمة عظمى

أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب جـ = ١٠٠٠ سم²

١٠

نفرض أن طول قاعدة

المثلث = ٢ س سم

وارتفاعه = ع سم

المحيط = ٢٠ سم

٢ س + ٢ $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ع}^٢}$ = ٢٠

∴ $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ع}^٢}$ = ١٠ - س

∴ $\text{س}^٢ + \text{ع}^٢$ = ١٠٠ - ٢٠ س + $\text{س}^٢$

∴ ع = $\sqrt{١٠٠ - ٢٠\text{س}}$

∵ مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ س × ع

= س ع = س $\sqrt{١٠٠ - ٢٠\text{س}}$

= $\sqrt{١٠٠\text{س}^٢ - ٢٠\text{س}^٣}$

∴ $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\frac{(١٠٠\text{س}^٢ - ٢٠\text{س}^٣)}{\sqrt{١٠٠\text{س}^٢ - ٢٠\text{س}^٣}}$

= $\frac{(٥٠\text{س} - ٣٠\text{س}^٢)}{\sqrt{١٠٠\text{س}^٢ - ٢٠\text{س}^٣}}$

عند القيم العظمى أو الصغرى المحلية

بوضع $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ = صفر

٥٠ س - ٣٠ $\text{س}^٢$ = ٠

س = ٠ (مرفوض) ، س = $\frac{٥}{٣}$

$\frac{\text{م}}{\text{س}}$ > ٠ عندما س < $\frac{٥}{٣}$

$\frac{\text{م}}{\text{س}}$ < ٠ عندما س > $\frac{٥}{٣}$

توجد قيمة عظمى عند س = $\frac{٥}{٣}$

طول قاعدة المثلث = ١٠ سم

وطول كل من الضلعين الآخرين = ١٠ سم

مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما يكون

المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ١٠ سم

١١

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠$

ص = $\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}$

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

م = $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}$

م = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}$

$\frac{\text{م}}{\text{س}}$ = $\frac{-\text{س}^٢}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}}$ + $\frac{١٠٠ - \text{س}^٢}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}}$

$\frac{\text{م}}{\text{س}}$ = $\frac{١٠٠ - ٢\text{س}^٢}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^٢}}$

م = ٠ ∴ س = $\sqrt{٥٠}$

عند س = $\sqrt{٥٠}$ تجعل م قيمة عظمى

طولا ضلعي القائمة هي $\sqrt{٥٠}$ سم ، $\sqrt{٥٠}$ سم

حل آخر

مساحة المثلث (م)

م = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ جا θ × ١٠ جتا θ

= ٥٠ جا θ جتا θ

= ٢٥ جا ٢θ

[illegible]

[illegible]

(٤)

[illegible]

(٥)

[illegible]

(٦)

[illegible]

(٧)

[illegible]

(٨)

[illegible]

(٩)

[illegible]

(١٠)

[illegible]

(١١)

[illegible]

(١٢)

[illegible]

(١٣)

[illegible]

(١٤)

[illegible]

(١٥)

[illegible]

(١٦)

[illegible]

(١٧)

[illegible]

(١٨)

[illegible]

حجم العلبة (ح)

= (٢٤ − ٢ س) × (١٥ − ٢ س) (س)

= ٢ س (١٢ − س) (١٥ − ٢ س)

= ٣٦٠ س − ٧٨ س^{٢} + ٤ س^{٣}

ح = ٣٦٠ − ١٥٦ س + ١٢ س^{٢}

بوضع ح$'$ = ٠ ∴ س = ١٠ (مرفوض) ، س = ٣

ح$''$ = −١٥٦ + ٢٤ س

ح$''_{س = ٣}$ < ٠ (عظمى)

أبعاد العلبة هى ١٨ ، ٩ ، ٣ سم

نفرض أن طول ضلع القاعدة = س ، وارتفاعه = ع

∴ ٨ س + ٤ ع = ٢٤٠

∴ ٢ س + ع = ٦٠

∴ ع = ٦٠ − ٢ س (١)

، ∵ ح = س^{٢} ع

ومن (١) ∴ ح = ٦٠ س^{٢} − ٢ س^{٣}

∴ ح$'$ = ١٢٠ س − ٦ س^{٢} وعند ح$'$ = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٢٠

، ∵ ح$''$ = ١٢٠ − ١٢ س ، عند س = ٢٠

فإن : ح$''$ = −١٢٠ < ٠ ∴ توجد نهاية عظمى

∴ عند س = ٢٠ سم يكون الحجم أكبر ما يمكن

ومن (١) : ∴ ع = ٢٠ سم

∴ أبعاد متوازى المستطيلات ذو أكبر حجم هى

٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم

نفرض أن بعدى القاعدة = س ، ٢ س والارتفاع ع

∴ س + ٢ س + ع = ١٨٠

∴ ع = ١٨٠ − ٣ س

حجم متوازى المستطيلات (ح)

= س × ٢ س × ع = ٢ س^{٢} (١٨٠ − ٣ س)

= ٣٦٠ س^{٢} − ٦ س^{٣}

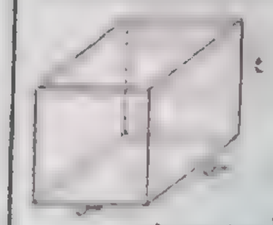
ح$'$ = ٧٢٠ س − ١٨ س^{٢}

ح$'$ = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٤٠

ح$''$ = ٧٢٠ − ٣٦ س

(ح$''$)$_{س = ٤٠}$ < ٠ أكبر ما يمكن

الأبعاد هى ٤٠ سم ، ٨٠ سم ، ٦٠ سم



نفرض أن طول ضلع

القاعدة المربعة = س سم

وارتفاع الصندوق = ع سم

∵ المساحة الكلية = ٢ س^{٢} + ٤ س ع

∴ ٢ س^{٢} + ٤ س ع = ٢٨٤

∴ ع = $\frac{٢٨٤ - ٢ س^{٢}}{٤ س}$ = $\frac{١٩٢ - س^{٢}}{٢ س}$

∴ حجم الصندوق (ح) = س^{٢} ع

$\frac{س^{٢} (١٩٢ - س^{٢})}{٢ س}$

= ٩٦ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٣}

∴ $\frac{ح'}{س}$ = ٩٦ − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}

، ∵ $\frac{ح'}{س}$ = ٠ ∴ $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} = ٩٦

∴ س^{٢} = ٦٤ ∴ س = ٨

، ∵ $\frac{ح''}{س}$ = −٣ س

∴ عندما س = ٨ فإن $\frac{ح''}{س}$ < صفر

∴ الحجم أكبر ما يمكن

أكبر حجم (ح) = ٩٦ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٣}

= ٩٦ × ٨ − $\frac{١}{٢}$ × (٨)^{٣} = ٥١٢ سم^{٣}

∴ ٢ س^{٢} = ٢١٦

∴ س = ١٨

∴ المساحة الكلية (م)

= ٦ س ص + ٤ س^{٢}

∴ م = ٦ س × $\frac{٢٩٢}{س}$ + ٤ س^{٢}

= ١٧٢٨ س$^{-١}$ + ٤ س^{٢}

∴ $\frac{دم}{دس}$ = −١٧٢٨ س$^{-٢}$ + ٨ س

، بوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠

∴ س^{٣} = ٢١٦

∴ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ = ٣٤٥٦ س$^{-٣}$ + ٨

، عند س = ٦

∴ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ > صفر

∴ المساحة أقل ما يمكن

∴ الأبعاد هى ٦ سم ، ١٢ سم ، ١٠ سم

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم

، ارتفاع الأسطوانة = ع سم

، حجم الأسطوانة = ح سم^{٣}

، ∵ نق + ع = ٣٠ ∴ ع = ٣٠ − نق

، ∵ ح = ط نق^{٢} ع = ط نق^{٢} (٣٠ − نق)

= ٣٠ ط نق^{٢} − ط نق^{٣} (١)

∴ $\frac{دح}{دنق}$ = ٦٠ ط نق − ٣ ط نق^{٢}

، $\frac{د^{٢}ح}{دنق^{٢}}$ = ٦٠ ط − ٦ ط نق

نفرض أن طول نصف قطر قاعدته = نق

، ارتفاعه = ع

ح (حجم) = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع = ٨٠٠٠ ط

∴ ع = $\frac{٢٤٠٠٠}{نق^{٢}}$

مساحة المخروط = ط نق^{٢} + ط نق ل

= ط نق^{٢} + ط نق $\sqrt{نق^{٢} + ع^{٢}}$

= ط نق^{٢} + ط نق $\sqrt{نق^{٢} + \frac{٥٧٦٠٠٠٠}{نق^{٢}}}$

∴ م َ = ٢ π نق − ١٦٠٠٠ π نق$^{-٢}$

، م َ = ٢ π + ٣٢٠٠٠ π نق$^{-٣}$

م َ = ٠ عندما ٢ π نق − ١٦٠٠٠ π نق$^{-٢}$ = ٠

∴ نق − $\frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}}$ = ٠ ∴ نق^{٣} = ٨٠٠٠

∴ نق = ٢٠

، ∵ م َ = ٦ π > ٠ أقل ما يمكن

∴ الأبعاد : نق = ٢٠ سم ، ع = ٢٠ سم

٣٦

الحجم ك = π نق^{٢} ع ∴ ع = $\frac{ك}{π\ نق^{٢}}$

المادة التى تصنع منها العلبة = المساحة الكلية للأسطوانة × السُمك

م = ٢ π نق (ع + نق) × هـ

= ٢ π نق × ($\frac{ك}{π\ نق^{٢}}$ + نق) × هـ

= ٢ هـ (ك نق$^{-١}$ + π نق^{٢})

م َ = ٢ هـ (٢ π نق − ك نق$^{-٢}$)

∴ م َ = ٢ هـ (٢ π + ٢ ك نق$^{-٣}$)

م َ = ٠ فإن : نق = $\sqrt[٣]{\frac{ك}{π\ ٢}}$

عند نق = $\sqrt[٣]{\frac{ك}{π\ ٢}}$ فإن : م َ > ٠ (قيمة صغرى)

∴ $\frac{ع}{نق}$ = $\frac{ك}{π \times نق^{٢}}$ = $\frac{ك}{\left(\frac{ك}{π\ ٢}\right) \times π}$ = $\frac{٢}{١}$

٣٧

الربح = سعر البيع − سعر التكلفة

ر = (١٠٠ − ٠,٠٢ س) × س − (٤٠ س + ١٥٠٠٠)

= −٠,٠٢ س^{٢} + ٦٠ س − ١٥٠٠٠

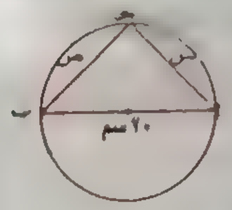
ر َ = −٠,٠٤ س + ٦٠

ر َ = ٠ ∴ س = ١٥٠٠

ر َ َ = −٠,٠٤ < ٠ عظمى

∴ عدد الوحدات التى يجب إنتاجها = ١٥٠٠

٣٨



س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠٠

ص = $\sqrt{٤٠٠ − س^{٢}}$

مجموع العددين م = س + ص

= س + $\sqrt{٤٠٠ − س^{٢}}$

م َ = ١ + $\frac{−٢ س}{٢ \sqrt{٤٠٠ − س^{٢}}}$ = ١ + $\frac{−س}{\sqrt{٤٠٠ − س^{٢}}}$

م َ = ٠ ∴ س = $\sqrt{٤٠٠ − س^{٢}}$

∴ س^{٢} = ٤٠٠ − س^{٢} ∴ س^{٢} = ٢٠٠

∴ س = ١٠ $\sqrt{٢}$

(م)$_{س = ١٠ \sqrt{٢}}$ < ٠ (أكبر ما يمكن)

∴ البعدين س = ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ص = ١٠ $\sqrt{٢}$

٣٩

∵ د (س) = $\frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

∴ ميل المماس ر (س) = $\frac{−١٢ س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$

∴ ر َ (س) = $\frac{−١٢ (س^{٢} + ٣)^{٢} + ١٢ س \times ٤ س (س^{٢} + ٣)}{(س^{٢} + ٣)^{٤}}$

= $\frac{٣٦ (س^{٢} − ١)}{(س^{٢} + ٣)^{٣}}$

ميل المماس ر (س) يكون أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن عندما يكون ر َ (س) = صفر

∴ س^{٢} − ١ = ٠ ∴ س = ١ أ، س = −١

∴ توجد قيمة عظمى عند س = −١

وهى (−١ ، $\frac{٣}{٢}$) ، توجد قيمة صغرى عند س = ١

وهى (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

∴ ميل المماس يكون أكبر ما يمكن عند النقطة (−١ ، $\frac{٣}{٢}$)

، ميل المماس يكون أصغر ما يمكن عند النقطة (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

٤٠

بفرض أى مثلث وليكن س ص ع

∴ مساحة المثلث (م) = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا س

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جتا س وبوضع $\frac{ء م}{ء س}$ = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب جتا س = ٠ ∴ جتا س = ٠

∴ س = ٩٠°

، ∵ $\frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}}$ = −$\frac{١}{٢}$ أ ب جا س

وبوضع س = ٩٠°

∴ $\frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}}$ = −$\frac{١}{٢}$ أ ب < ٠

أى أن عند س = ٩٠° فهناك قيمة عظمى للدالة أى أن مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما تكون الزاوية بين الضلعين اللذين طولاهما أ ، ب قائمة أى أن الضلع الثالث قطر فى الدائرة المارة برؤوس المثلث.

٤١

نفرض أن ص = $\frac{س}{أ س^{٢} + ب}$

ص َ = $\frac{(أ س^{٢} + ب) (١) − س (٢ أ س)}{(أ س^{٢} + ب)^{٢}}$

= $\frac{ب − أ س^{٢}}{(أ س^{٢} + ب)^{٢}}$

ص َ = ٠ ∴ س = ± $\sqrt{\frac{ب}{أ}}$

ص َ َ = $\frac{−٢ أ س (أ س^{٢} + ب)^{٢} − (ب − أ س^{٢}) (٤ أ س) (أ س^{٢} + ب)}{(أ س^{٢} + ب)^{٤}}$

= $\frac{٢ أ^{٢} س^{٣} − ٦ أ ب س}{(أ س^{٢} + ب)^{٣}}$

، ص َ َ$_{س = \sqrt{\frac{ب}{أ}}}$ < ٠ (قيمة عظمى)

∴ (ص)$_{س = \sqrt{\frac{ب}{أ}}}$ = $\frac{\sqrt{\frac{ب}{أ}}}{أ (\frac{ب}{أ}) + ب}$ = $\frac{\sqrt{\frac{ب}{أ}}}{٢ ب}$

= $\frac{١}{٢ \sqrt{أ ب}}$

∴ $\frac{س}{أ س^{٢} + ب}$ ≤ $\frac{١}{٢ \sqrt{أ ب}}$ لجميع قيم أ ، ب الموجبة.

٤٢

Δ ء هـ حـ ، ب حـ د متشابهان

∴ $\frac{س}{٩}$ = $\frac{١}{ص}$

حيث س ، ص > ٠

∴ ص = $\frac{٣٦}{س}$

مساحة المثلث أ و هـ (م) = $\frac{١}{٢}$ (٤ + ص) (٩ + س)

∴ م = $\frac{١}{٢}$ (٤ + $\frac{٣٦}{س}$) (٩ + س)

= ٢ س + ٣٦ + $\frac{١٦٢}{س}$

∴ م َ = ٢ + $\frac{−١٦٢}{س^{٢}}$ بوضع م َ = ٠

∴ س^{٢} = ٨١ ∴ س = ٩ ، م َ = ٢٢٤ س$^{-٣}$

م َ$_{عند س = ٩}$ > ٠ قيمة صغرى

∴ أصغر مساحة للمثلث = م$_{عند س = ٩}$

= ٢ × ٩ + ٣٦ + $\frac{١٦٢}{٩}$

= ٧٢ سم^{٢}

٤٣

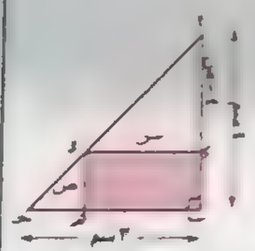
بفرض أن ء ب = ص

، ب هـ = س

∴ أ ء = ٤ − ص

، هـ حـ = ٣ − س

، ∵ $\overline{ء و}$ // $\overline{ب حـ}$



∴ $\frac{س}{٣}$ = $\frac{٤ − ص}{٤}$

∴ س = $\frac{١٢ − ٣ ص}{٤}$ = ٣ − $\frac{٣}{٤}$ ص (١)

∵ مساحة المستطيل (م) = ص س = ص (٣ − $\frac{٣}{٤}$ ص)

∴ م = ٣ ص − $\frac{٣}{٤}$ ص^{٢}

∴ $\frac{ء م}{ء ص}$ = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ ص ، بوضع $\frac{ء م}{ء ص}$ = ٠

∴ ص = ٢

عند س = ٢ تكون

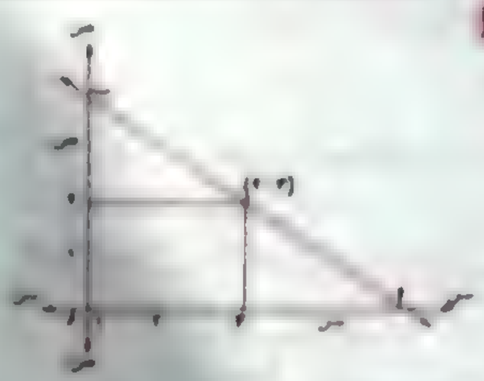
مساحة المستطيل أكبر

ما يمكن

ومن معادلة (١) ∴ س = ٢ ، $\frac{٣}{٤}$ = ٢ − $\frac{٣}{٤}$

أي أن أبعاد المستطيل هي ٢ سم ، $\frac{٣}{٤}$ سم

٤٤



من تشابه المثلثات $\frac{س}{٤}$ = $\frac{ص}{٦}$ ∴ ص = $\frac{٣}{٢}$ س

مساحة Δ أ ب جـ

م = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) (ص + ٢)

= $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) ($\frac{٣}{٢}$ س + ٢) = ٦ + س + ٣ س^{٢}

∴ م' = ١ + ٦ س ، ∴ م'' = ١٨ س

بوضع م' = ٠ ، س = $\frac{-١}{٦}$

∴ س^{٢} = ٩ منها س = ٣

م'' = ١٨ > ٠ أقل ما يمكن

∴ أقل مساحة

م = ٦ + ٣ + $\frac{٩}{٢}$ = ١٣ وحدة مربعة

٤٥

مساحة Δ أ م ب

م = مساحة المربع أ ب جـ د − [م (المثلث أ ب م)

+ م (المثلث م جـ ب) + م (المثلث أ ب د)]

= ١٠٠ − ($\frac{١}{٢}$ س × ١٠ + $\frac{١}{٢}$ (١٠ − س)

= $\frac{٧}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ (١٠ − $\frac{٧}{٢}$ س) + ١٠)

= $\frac{٧}{٢}$ س^{٢} − ٥ س + ١٠٠

م' = $\frac{٧}{٢}$ س − ٥ ، م'' = ٥ ∴ س = $\frac{١٠}{٧}$

م'' = $\frac{٧}{٢}$ > ٠

∴ عند س = $\frac{١٠}{٧}$ المساحة أصغر ما يمكن

٤٦

من تطابق Δ ب د و ، ر و ح يثبت أن ب د و = ح ر

من تطابق Δ أ د ح ، جـ ر و يثبت أن د ح = و ر

∴ الشكل سداسي أضلاع ، مساحته م

م = مساحة المستطيل − ٢ × مساحة Δ ب د و

− ٢ × مساحة Δ و جـ ر = ٦ × ١٠ − ٢ × $\frac{١}{٢}$

× س (٦ − س) − ٢ × $\frac{١}{٢}$ × (١٠ − س)

= س × ٢ س^{٢} − ١٦ س + ٦٠ وهو المطلوب (١)

م' = ٤ س − ١٦

بوضع م' = ٠ ∴ س = ٤

م'' = ٤ > ٠ أصغر ما يمكن

∴ أصغر قيمة ممكنة للمساحة

= ٢ × ٤ − ١٦ × ٤ + ٦٠ = ٢٨ وحدة مربعة

٤٧

أ) ١٢ − ١٦

١٢

من تشابه المثلثين أ ب و ، ن ب و

$\frac{س}{١٢}$ = $\frac{١٦ − ص}{١٦}$ ∴ ص = ١٦ − $\frac{٤}{٣}$ س

مساحة المستطيل = ٢ س ص

م = ٢ س (١٦ − $\frac{٤}{٣}$ س) = ٣٢ س − $\frac{٨}{٣}$ س^{٢}

م' = ٣٢ − $\frac{١٦}{٣}$ س

بوضع م' = ٠ ∴ س = ٦

م'' = −$\frac{١٦}{٣}$ < قيمة عظمى

∴ يعطي المستطيل قيمة س = ٦ سم

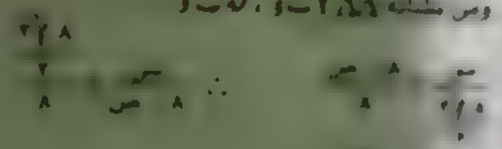
∴ ٢ ص = ٢ (١٦ − $\frac{٤}{٣}$ × ٦) = ١١ سم

٤٨

من هندسة الشكل

أ) ٨ $\sqrt{٢}$ سم

ومن مثلث Δ أ ب و ، ن ب و



س = ٨ ص ∴ ص = ٨ س

س = ٨ $\sqrt{٢}$ س

مساحة المستطيل م = س × ٢ ص = ٢ س ص

= ٢ س (٨ $\sqrt{٢}$ س)

= ١٦ س − ٢ $\sqrt{٢}$ س^{٢}

م' = ١٦ − ٤ $\sqrt{٢}$ س بوضع م' = ٠

∴ س = $\frac{١٦}{٤\sqrt{٢}}$ = $\frac{٤\sqrt{٢}}{٢}$

م'' = −٤ $\sqrt{٢}$ < قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة للمستطيل م = $\frac{٣٢}{٢}$

= ٢ × $\frac{٤\sqrt{٢}}{٢}$ × (٨ − ٢ $\sqrt{٢}$ × $\frac{٤\sqrt{٢}}{٢}$) = $\frac{٣٢\sqrt{٢}}{٢}$ سم^{٢}

٤٩

نفرض أن عدد الأجهزة الزائدة = س جهاز

∴ العدد الكلي للأجهزة = ٥٠ + س جهاز

∴ انخفاض في كل جهاز = ٢٠ − $\frac{١}{٢}$ س جنيه

∴ الربح ر = (٥٠ + س) (٢٠ − $\frac{١}{٢}$ س)

= ١٠٠٠ + ٥ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

∴ ر' = ٥ − س

بوضع ر' = ٠ ∴ س = ٥

ر'' = −١ < ٠ قيمة عظمى

∴ عدد الأجهزة التي تحقق أكبر ربح = ٥٥ جهازاً

٥٠

ب) ٢ ساعة × ٢٠ ساعة

ب) ٢ ساعة × ٢٠ ساعة

بوضع ب

أ) ٢ ساعة × ٢٠ ساعة

∴ ساعة ساعة ∴ ب = $\frac{٦}{١}$ × $\frac{٦}{١}$

ب) ٢ ساعة ٢ ساعة

س$_{١}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ ح عظمى

س$_{٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ > صغرى

∴ أقصر قيمة للتيار عند ب = $\frac{٦}{١}$

∴ تكون ب = ٢ $\sqrt{٢}$

٥١

∴ (س)

∴ (س)

بوضع ∴ (س)

∴ (س) < ٠

∴ القيمة العظمى لمحصلة الزوجة

= ٢ × $\frac{(٢٠ + ٢٠ + ٢٠)}{(١٠ + ٢٠ + ٢٠)}$ = ٢٢ ،

٥٢

① $ع(ن) = ٢٠ \left[\frac{ن}{١٢} - لو_{هـ}\left(\frac{ن}{١٢}\right)\right] + ٣٠$

$\therefore ع'(ن) = ٢٠ \left[\frac{١}{١٢} \times \frac{١٢}{ن} - \frac{١}{١٢}\right]$

$= ٢٠ \left[\frac{١٢ - ن}{١٢ ن}\right]$

$\because ع'(ن) =$ صفر

عندما $ن = ١٢$ يوم

$\therefore$ عدد البكتريا يكون أقل ما يمكن بعد ١٢ يوم.

② أقل عدد من البكتريا

$= ٢٠ \left[\frac{١٢}{١٢} - لو_{هـ}\left(\frac{١٢}{١٢}\right)\right] + ٣٠ = ٥٠$ لكل سم^٣

٥٣

نفرض أن سعر الطن من الحديد الأقل جودة = $ك$

$\therefore$ سعر الطن من الحديد الجيد = $٢ ك$

الإيراد $ى = ك س + ٢ ك ص$

$= ك س + ٢ ك \times \frac{٤٠ - ٥ س}{١٠ - س}$

$= ك \times \frac{١٠ س - س^٢ + ٨٠ - ١٠ س}{(١٠ - س)}$

$= \frac{٨٠ - س^٢}{١٠ - س} ك$

$ى' = \frac{(١٠ - س)(-٢ س) - (٨٠ - س^٢)(-١)}{(١٠ - س)^٢} ك$

$\frac{س^٢ - ٢٠ س + ٨٠}{(١٠ - س)^٢} ك$

$ى' = ٠$

$\therefore س = ١٤,٥$ ، $س \approx ٥,٥$

$ى''_{س = ١٤,٥} >$ ٠ صغرى

$ى''_{س = ٥,٥} <$ ٠ عظمى

الكمية التي ينتجها المصنع من الصنف $س \approx ٥,٥$ طن

، $ص \approx ٢,٨$ طن.

٥٤

المحيط = ٤٠٠

$٢ ص + ٢ \pi س = ٤٠٠$

$ص = ٢٠٠ - \pi س$

مساحة سطح الملعب م = ٠

$م = ٢ س ص + \pi س^٢$

$= ٢ س (٢٠٠ - \pi س) + \pi س^٢$

$= ٤٠٠ س - ٢ \pi س^٢ + \pi س^٢$

$= ٤٠٠ س - \pi س^٢$

$م' = ٤٠٠ - ٢ \pi س$

بوضع $م' = ٠$ ، $\therefore س = \frac{٢٠٠}{\pi}$

$م'' = -٢ \pi <$ ٠ عظمى

في حالة المساحة أكبر ما يمكن

$س = \frac{٢٠٠}{\pi}$ ، $ص = ٢٠٠ - \pi \times \frac{٢٠٠}{\pi} =$ صفر

أي أن البعد ص يتلاشى ويصبح الشكل دائرة نصف قطرها $\frac{٢٠٠}{\pi}$

٥٥

مساحة سطح الكرة = $٤ \pi نق^٢$

مساحة سطح الأسطوانة = $٢ \pi نق (نق + ع)$

مجموع المساحتين م = $٤ \pi نق^٢ + ٢ \pi نق$

$(نق + ع) = ٢٥٠ \pi$ $\therefore ٦ \pi نق^٢ + ٢ \pi نق ع$

$= ٢٥٠ \pi$

$ع = \frac{٢٥٠ \pi - ٦ \pi نق^٢}{٢ \pi نق} = \frac{١٢٥ - ٣ نق^٢}{نق}$

المجم $ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣ + \pi نق^٢ ع$

$= \frac{٤}{٣} \pi نق^٣ + \pi نق^٢ \times \frac{١٢٥ - ٣ نق^٢}{نق}$

$= \frac{٤}{٣} \pi نق^٣ + ١٢٥ \pi نق - ٣ \pi نق^٣$

$ح' = ٤ \pi نق^٢ + ١٢٥ \pi - ٩ \pi نق^٢$

$= ١٢٥ \pi - ٥ \pi نق^٢$

بوضع $ح' = ٠$ $\therefore نق = ٥$ سم

$ح'' = -١٠ \pi نق <$ ٠ عظمى

$\therefore$ نصف قطرها = ٥ سم

٥٦

المساحة = $\pi نق^٢ + ٢ \pi نق ع$

$+ \frac{١}{٢} \times ٤ \pi نق^٢ = ٣ \pi نق^٢$

$+ ٢ \pi نق ع = ٢٠٠٠ \pi$

$ع = \frac{٢٠٠٠ - ٢ نق^٢}{٢ نق}$

المجم $ح = \pi نق^٢ ع + \frac{١}{٣} \times \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

$= \pi نق^٢ ع + \frac{٢}{٩} \pi نق^٣$

$ح = \pi نق^٢ \times \frac{٢٠٠٠ - ٢ نق^٢}{٢ نق} + \frac{٢}{٩} \pi نق^٣$

$= ١٠٠٠ \pi نق - \frac{٢}{٩} \pi نق^٣ + \frac{٢}{٩} \pi نق^٣$

$= ١٠٠٠ \pi نق - \frac{٥}{٩} \pi نق^٣$

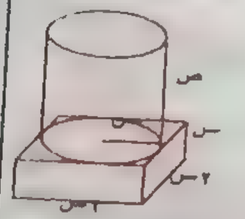
$ح' = ١٠٠٠ \pi - \frac{٥}{٩} \pi نق^٢$

بوضع $ح' = ٠$ $\therefore نق^٢ = ٤٠٠$ $\therefore نق = ٢٠$ سم

$ح'' = -\frac{٥}{٩} \pi \times ٢ نق <$ ٠ لجميع قيم نق

$\therefore نق = ٢٠$ سم ، $ع = ٢٠$ سم

٥٧



$ح = ٢٧$ متر^٣

$٢ س \times ٢ س \times س$

$+ \pi س^٢ ص = ٢٧$ متر^٣

$ص = \frac{٢٧ - ٤ س^٣}{\pi س^٢}$

المساحة السطحية م = ٢ (٢ س × س + ٢ س × س

+ ٢ س × ٢ س) + ٢ π س ص

$\therefore م = ١٦ س^٢ + ٢ \pi س ص$

$= ١٦ س^٢ + ٢ \pi س \times \frac{(٢٧ - ٤ س^٣)}{\pi س^٢}$

$= \frac{١٦ س^٣ + ٥٤ - ٨ س^٣}{س} = \frac{٨ س^٣ + ٥٤}{س}$

$م' = \frac{س (٢٤ س^٢) - (٨ س^٣ + ٥٤) \times ١}{س^٢}$

$= \frac{١٦ س^٣ - ٥٤}{س^٢}$

عند $س = \frac{٣}{٢}$ تجعل مساحة الخزان أقل ما يمكن

٥٨

بفرض أن طول نصف قطر الأسطوانة $نق_١$

، طول نصف قطر الكرة نق

$\because ح = \pi نق_١^٢ ع$

، $\because نق_١^٢ = نق^٢ - \frac{١}{٤} ع^٢$

$\therefore ح = \pi ع (نق^٢ - \frac{١}{٤} ع^٢)$

$\therefore ح = \pi (نق^٢ ع - \frac{١}{٤} ع^٣)$

$\therefore \frac{دح}{دع} = \pi [نق^٢ - \frac{٣}{٤} ع^٢]$

، $\because \frac{دح}{دع} = ٠$ عندما $نق^٢ = \frac{٣}{٤} ع^٢$

$\therefore ع^٢ = \frac{٤}{٣} نق^٢$ $\therefore ع = \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق$

$\therefore ع = \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق$

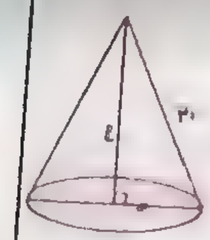
$\therefore \frac{د^٢ح}{دع^٢} = \frac{-٣}{٢} \pi ع <$ ٠

$\therefore$ الحجم أكبر ما يمكن عند $ع = \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق$

$\therefore ح = \pi (نق^٢ \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} نق - \frac{١}{٤} \times \frac{٨}{٣\sqrt{٣}} نق^٣)$

$\frac{٤ \pi نق^٣}{٣\sqrt{٣}}$

٥٩



$نق^٢ = ٣ - ع^٢$

، $\therefore ح = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

$\therefore ح = \frac{١}{٣} \pi ع (٣ - ع^٢)$

$= \pi ع - \frac{١}{٣} \pi ع^٣$

$\frac{دح}{دع} \quad \pi - \pi ع^٢$

وبوضع $\frac{دح}{دع} =$ صفر $\therefore ع^٢ = ١$ $\therefore ع = ١$ سم

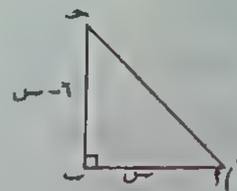
ومنها نق = $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ $\frac{ء^٢ح}{ء ع^٢}$ = −٢ π ع (سالبة)

∴ حجم المخروط يكون أكبر ما يمكن عندما يكون طولى ضلعى المثلث ١ سم ، $\sqrt{٢}$ سم

٦٠

حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث حول $\overleftrightarrow{ب حـ}$ دورة كاملة



ح = $\frac{١}{٣}$ π س^٢ × (٦ − س)

= $\frac{١}{٣}$ π (٦ س^٢ − س^٣)

∴ حَ = $\frac{١}{٣}$ π (١٢ س − ٣ س^٢)

وبوضع حَ = ٠

∴ $\frac{١}{٣}$ π × ٣ س (٤ − س) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٤

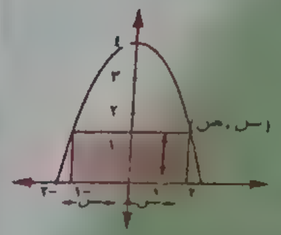
، ∵ حَ = $\frac{١}{٣}$ π (١٢ − ٦ س)

∴ (حَ)$_{س = ١}$ > ٠

∴ الحجم أكبر ما يمكن عند أب = ٤ سم

٦١

مساحة المستطيل (م)



= ٢ س × ص

= ٢ س × (٤ − س^٢)

= ٨ س − ٢ س^٣

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = ٨ − ٦ س^٢

، ∵ $\frac{ء م}{ء س}$ = ٠ ∴ س = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ والسالب مرفوض

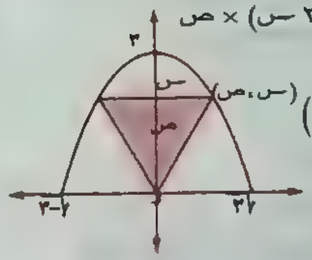
وفى هذه الحالة ص = $\frac{٨}{٣}$

، ∵ $\frac{ء^٢ م}{ء س^٢}$ = −١٢ س < ٠

∴ توجد قيمة عظمى

∴ بعدا المستطيل هما $\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$

٦٢



(م) مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ (٢ س) × ص

م = س ص

م = س (٣ − $\frac{١}{١٢}$ س^٢)

م = ٣ س − $\frac{١}{١٢}$ س^٣

مَ = ٣ − $\frac{١}{٤}$ س^٢

عند مَ = ٠

∴ س = ٢ $\sqrt{٣}$

∴ س = ± ٢ $\sqrt{٣}$

مَ = − $\frac{١}{٢}$ س

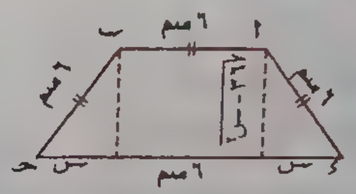
∴ عند س = ٢ $\sqrt{٣}$ فإن مَ < ٠ عظمى

∴ المساحة أكبر ما يمكن عند س = ٢ $\sqrt{٣}$

م$_{س = ٢\sqrt{٣}}$ = ٣ (٢ $\sqrt{٣}$) − $\frac{١}{١٢}$ (٢ $\sqrt{٣}$)^٣

= ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

٦٣



∵ م = $\frac{١}{٢}$ (أب + ءحـ) × ع

∴ م = $\frac{٦ + (٢ س + ٦)}{٢}$ × $\sqrt{٣٦ − س^٢}$

∴ م = (٦ + س) $\sqrt{٣٦ − س^٢}$

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = (٦ + س) × $\frac{-٢ س}{٢\sqrt{٣٦ − س^٢}}$ + $\sqrt{٣٦ − س^٢}$

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = $\frac{-٦ س − س^٢ + ٣٦ − س^٢}{\sqrt{٣٦ − س^٢}}$

= $\frac{-٢ س^٢ − ٦ س + ٣٦}{\sqrt{٣٦ − س^٢}}$

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = ٠ ∴ س^٢ + ٣ س − ١٨ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٦) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٦ (مرفوض)

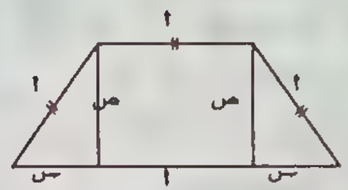
، عندما س > ٣ تكون $\frac{ء م}{ء س}$ < ٠

، عندما س < ٣ تكون $\frac{ء م}{ء س}$ > ٠

∴ عندما س = ٣ تكون المساحة قيمة عظمى

وعندها تكون م = (٩) $\sqrt{٣٦ − ٩}$ = ٢٧ $\sqrt{٣}$ سم^٢

٦٤



من الشكل ص = $\sqrt{أ^٢ − س^٢}$

م (مساحة شبه المنحرف) = $\frac{١}{٢}$ (أ + أ + ٢ س) × ص

= (أ + س) $\sqrt{أ^٢ − س^٢}$

مَ = (أ + س) × $\frac{-٢ س}{٢\sqrt{أ^٢ − س^٢}}$ + $\sqrt{أ^٢ − س^٢}$

= $\frac{-أ س − س^٢ + أ^٢ − س^٢}{\sqrt{أ^٢ − س^٢}}$ = $\frac{أ^٢ − أ س − ٢ س^٢}{\sqrt{أ^٢ − س^٢}}$

مَ = ٠ فإن أ^٢ − أ س − ٢ س^٢ = ٠

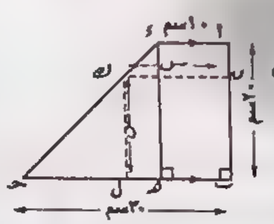
س = $\frac{أ}{٢}$ أ، −أ (مرفوض)

مَ$_{س = \frac{أ}{٢}}$ < ٠ قيمة عظمى

فى حالة س = $\frac{أ}{٢}$ تكون المساحة أكبر ما يمكن وتكون

قاعدته الكبرى = أ + ٢ س = أ + ٢ × $\frac{أ}{٢}$ = ٢ أ

٦٥



نفرض أن بعدى المستطيل هما س ، ص ثم

نرسم $\overline{ءهـ}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

∴ ءهـ = أب = ٢٠ سم

، هـ حـ = ٣٠ − ١٠ = ٢٠ سم

، ل حـ = (٣٠ − س) سم فى Δ حـ ء هـ

، ∵ $\frac{ل هـ}{ء هـ}$ = $\frac{حـ ل}{حـ هـ}$ ∴ $\frac{ص}{٢٠}$ = $\frac{٣٠ − س}{٢٠}$

∴ ص = ٣٠ − س

مساحة المستطيل (م) = س × ص

∴ م = س (٣٠ − س) = ٣٠ س − س^٢

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = ٣٠ − ٢ س

، ∵ $\frac{ء م}{ء س}$ = ٠ عندما س = ١٥

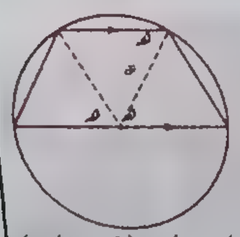
، ∵ $\frac{ء^٢ م}{ء س^٢}$ = −٢ < ٠

∴ عند س = ١٥ تكون م قيمة عظمى

، ص = ٣٠ − ١٥ = ١٥

∴ أكبر مستطيل يمكن رسمه يكون مربعًا طول ضلعه ١٥ سم

٦٦



مساحة شبه المنحرف

م = $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (١)^٢ جاهـ) × ٢

+ $\frac{١}{٢}$ (١)^٢ جا (١٨٠ − ٢ هـ)

م = جاهـ + $\frac{١}{٢}$ (٢ جاهـ جتاهـ) = جاهـ (١ + جتاهـ)

مَ = جتاهـ (١ + جتاهـ) + جاهـ (− جاهـ)

= جتاهـ + جتا^{٢}هـ − جا^{٢}هـ = ٢ جتا^{٢}هـ + جتاهـ − ١

بوضع مَ = ٠ ∴ جتاهـ = $\frac{١}{٢}$

منها هـ = ٦٠°

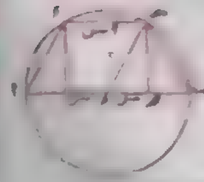
أو جتاهـ = −١ منها هـ = ١٨٠° (مرفوضة)

مَ = −٢ جتاهـ جاهـ − جاهـ

مَ$_{عند هـ = ٦٠}$ = − $\sqrt{٣}$ < ٠ قيمة عظمى

أكبر مساحة = م = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة.

حل آخر :



أب = ٢ نفرض حـ و = ٢ س

∴ حـ و = $\sqrt{١ - س^٢}$

المساحة م = $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٢) $\sqrt{١ - س^٢}$

− (س + ١) $\sqrt{١ - س^٢}$

م′ = $\sqrt{١ - س^٢}$ + (س + ١) $\frac{-٢ س}{٢\sqrt{١ - س^٢}}$

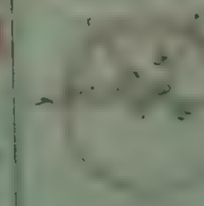
= $\frac{١ - س^٢ - س^٢ - س}{\sqrt{١ - س^٢}}$ = $\frac{-٢ س^٢ - س + ١}{\sqrt{١ - س^٢}}$

م′ = ٠ عند س = $\frac{١}{٢}$ ، − ١ مرفوض

م″ عند س < ٠ عظمى

مساحة تكون أكبر ما يمكن عند س = $\frac{١}{٢}$

∴ م = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ وحدة مربعة



مساحة قاعدة المنشور م

∴ م = ½ (أب + جـ د) ع

∴ م = ½ (س + س) ع

∴ ½ س² جا ٦٠ = ½ س² × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ ½ س² جا ٦٠ = ½ س² × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣ $\sqrt{٣}$

∴ ½ س² جا ٦٠ = ½ س² × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

∴ س² جا ٦٠ = س² × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ س² $\sqrt{٣}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ س² = ١

∴ س = ١ مرفوض

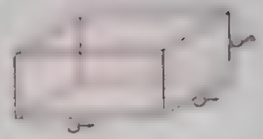
∴ س = −١ مرفوض

∴ س = ١ ∴ ع = ٢

∴ م = ½ × ٢ × ٢ × جا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

∴ م = $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

٦٥



الأبعاد = س ، س ، ص

الحجم = س² ص = ١٠٨

∴ ص = $\frac{١٠٨}{س^٢}$

مساحة الصاج = س² + ٤ س ص = س² + $\frac{٤ \times ١٠٨}{س}$

م = $\frac{س^٣ + ٤٣٢}{س}$

م′ = $\frac{س(٢ س^٢) - (س^٣ + ٤٣٢) \times ١}{س^٢}$ = $\frac{٢ س^٣ - ٤٣٢}{س^٢}$

م′ = ٠ فإن : س = ٦

م″ عند س = ٦ > صفر

مساحة الصاج تكون أقل ما يمكن عند س = ٦

أبعادها ٦ ، ٦ ، ٣ وتكون = $\frac{٦^٣ + ٤٣٢}{٦}$ = ١٠٨ متر²

وتكلفتها = ١٢٩٦ جنيهًا.

٦٦

نفرض أن أبعاده س ، س ، ص مترًا

حجمه = س² ص = ٢٥٢ ∴ ص = $\frac{٢٥٢}{س^٢}$

تكلفة الطلاء = ٥٠ × س² + ٢٠ × س² + ٣٠ × ٤ س ص

ت = ٧٠ س² + ١٢٠ س ص

ت = ٧٠ س² + ١٢٠ س × $\frac{٢٥٢}{س^٢}$

ت = ٧٠ س² + $\frac{٣٠٢٤٠}{س}$

ت′ = $\frac{س(٢١٠ س^٢) - (٧٠ س^٢ + ٣٠٢٤٠)(١)}{س^٢}$

ت′ = ١٤٠ س² − $\frac{٣٠٢٤٠}{س^٢}$

ت′ = ٠ ∴ س = ٦

ت″ > ٠ أقل ما يمكن عند س = ٦

أبعاد الصندوق هي ٦ ، ٦ ، ٧ متر

٦٧

بفرض أن أبعاد الصندوق الداخلية هي س ، س ، ص

، سعة الخزان = ك = س² ص ∴ ص = $\frac{ك}{س^٢}$

مساحة سطح الخزان من الداخل = س² + ٤ س ص

∴ م = س² + ٤ س $\left(\frac{ك}{س^٢}\right)$ = $\frac{س^٣ + ٤ ك}{س}$

∴ م′ = $\frac{س(٣ س^٢) - (س^٣ + ٤ ك)(١)}{س^٢}$

= $\frac{٢ س^٣ - ٤ ك}{س^٢}$

، م″ = $\frac{س^٢(٦ س^٢) - ٢ س(٢ س^٣ - ٤ ك)}{س^٤}$

= $\frac{٢ س^٣ + ٨ ك}{س^٣}$

م′ = ٠ فإن : س = $\sqrt[٣]{٢ ك}$

م″ > ٠ صغرى

أقل تكلفة تكون عند س = $\sqrt[٣]{٢ ك}$

فإن : ص = $\frac{ك}{س^٢}$ × $\frac{س}{س}$ = $\frac{ك س}{س^٣}$ = $\frac{ك س}{\left(\sqrt[٣]{٢ ك}\right)^٣}$

= $\frac{ك س}{٢ ك}$ = $\frac{١}{٢}$ س

أي نصف طول القاعدة.

٦٨

نفرض أن طول نصف قطر

قاعدة الأسطوانة = نق وارتفاعها = ع

∴ حجم الأسطوانة = π نق² ع

∴ π نق² ع = ١٠٨ π ∴ ع = $\frac{١٠٨}{نق^٢}$

ويفرض أن تكلفة الوحدة المربعة من الجدار = ك

∴ التكلفة ت = ٢ π نق ع × ك + ٢ π نق² × ٢ ك

= ٢ π ك $\left(نق \times \frac{١٠٨}{نق^٢} + ٢ نق^٢\right)$

= ٤ π ك (٥٤ نق⁻¹ + نق²)

∴ ت′ = ٤ π ك (−٥٤ نق⁻² + ٢ نق)

، ت″ = ٤ π ك (١٠٨ نق⁻³ + ٢)

بوضع ت′ = صفر

∴ −٥٤ نق⁻² + ٢ نق = ٠ ∴ نق = ٣

، ∵ (ت″)$_{نق = ٣}$ = ٤ π ك $\left(\frac{١٠٨}{٢٧} + ٢\right)$ > صفر

∴ أقل تكلفة عند نق = ٣ ، ع = ١٢

٦٩

بفرض طول ضلع المربع = س

وطول نصف قطر الدائرة = نق

∴ ٤ س + ٢ π نق = ٨٠

∴ س = ٢٠ − $\frac{١}{٢}$ π نق (١)

، ∵ مجموع مساحتي الشكلين (م)

م = س² + π نق² (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ م = $\left(٢٠ - \frac{١}{٢} π نق\right)^٢$ + π نق²

∴ $\frac{دم}{دنق}$ = ٢ $\left(٢٠ - \frac{١}{٢} π نق\right) \times \left(-\frac{١}{٢} π\right)$ + ٢ π نق

= −٢٠ π + $\frac{١}{٢}$ π² نق + ٢ π نق

، عند $\frac{دم}{دنق}$ = صفر ∴ $\frac{١}{٢}$ π نق + ٢ π نق = ٢٠

نق $\left(٢ + \frac{١}{٢} π\right)$ = ٢٠ ∴ نق = $\frac{٢٠}{٢ + \frac{١}{٢} π}$ = $\frac{٤٠}{π + ٤}$

، ∵ $\frac{د^٢م}{دنق^٢}$ = $\frac{١}{٢}$ π² + ٢ π > صفر

∴ المساحة قيمة صغرى عندما نق = $\frac{٤٠}{π + ٤}$

∴ س = ٢٠ − $\frac{٢٠ π + ٨٠}{π + ٤}$ = $\frac{٢٠ π}{π + ٤}$

∴ س = $\frac{٨٠}{π + ٤}$ ∴ س = ٢ نق

∴ عندما يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع قيمة صغرى فإن طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة

٧٠

نفرض أن طول ضلع المربع = س

طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ ٤ س + ٢ π . نق = ٣٤

∴ س = $\frac{١٧}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ π نق م = س^{٢} + π نق^{٢}

م = $\frac{٢٨٩}{٤}$ − $\frac{١٧}{٢}$ π نق + $\frac{١}{٤}$ π نق^{٢} + π نق^{٢}

مَ = − $\frac{١٧}{٢}$ + π $\frac{١}{٢}$ نق + ٢ π نق

مَ = ٠ عند نق = $\frac{\frac{١٧}{٢}}{٢ + \frac{١}{٢}\pi}$ = $\frac{١٧}{٤ + \pi}$

مً = $\frac{١}{٢}$ π^{٢} + ٢ π > ٠ قيمة صغرى

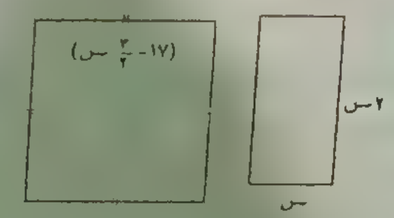
∴ طول الجزء الأول = ٤ س = ٣٤ − ٢ π $\left(\frac{١٧}{٤ + \pi}\right)$

= $\frac{٣٤ \pi - ١٣٦ + ٣٤ \pi}{٤ + \pi}$

= $\frac{١٣٦}{٤ + \pi}$

طول الجزء الثانى = ٢ π نق = ٢ π × $\frac{١٧}{٤ + \pi}$ = $\frac{٣٤ \pi}{٤ + \pi}$

٧٦



نفرض أن عرض المستطيل = س

∴ طوله = ٢ س سم

∴ محيط المستطيل = (س + ٢ س) × ٢ = ٦ س

∴ محيط المربع = ٦٨ − ٦ س

∴ طول ضلع المربع = $\frac{٦٨ - ٦ س}{٤}$

= (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س) سم

∴ مجموع مساحتى المستطيل والمربع (م)

= س × ٢ س + (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س)^{٢}

∴ م = ٢ س^{٢} + (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س)^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = ٤ س + ٢ (١٧ − $\frac{٣}{٢}$ س) × $\frac{-٣}{٢}$

= ٤ س + $\frac{٩}{٢}$ س − ٥١

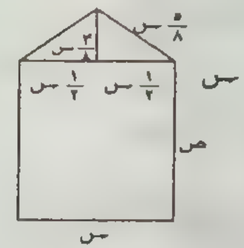
= $\frac{١١}{٢}$ س − ٥١

، ∵ $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠ ⟸ س = ٦ ، $\frac{ء^{٢}م}{ءس^{٢}}$ = $\frac{١٧}{٢}$ > ٠

∴ مجموع المساحتين أصغر ما يمكن

عندما س = ٦٠ سم

٧٥



المحيط = ٢ ص + س + ٢ × $\frac{٥}{٨}$ س

= ٢ ص + $\frac{٩}{٤}$ س

= ١٢٠ سم

∴ ص = ٦٠ − $\frac{٩}{٨}$ س

مساحة النافذة (م) = س ص + $\frac{١}{٢}$ (س) ($\frac{٣}{٨}$ س)

= س ص + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

∴ م = س (٦٠ − $\frac{٩}{٨}$ س) + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

= ٦٠ س − $\frac{١٥}{١٦}$ س^{٢}

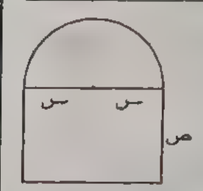
مَ = ٦٠ − $\frac{١٥}{٨}$ س

مَ = ٠ عند س = ٣٢ سم

مً = − $\frac{١٥}{٨}$ < ٠ عظمى محلية عند س = ٣٢

بعدا المستطيل هما ٣٢ سم ٢٤ سم

٧٦



بفرض أن بعدى المستطيل

= ص ، ٢ س

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) = س

محيط النافذة = ٢ س + ٢ ص + $\frac{١}{٢}$ (٢ π س)

= ٢ ص + ٢ س + π س = ٦

∴ ص = ٣ − س − $\frac{\pi}{٢}$ س

مساحة النافذة = م = ٢ س × ص + $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

= ٢ س (٣ − س − $\frac{\pi}{٢}$ س)

+ $\frac{١}{٢}$ π س^{٢} = ٦ س − ٢ س^{٢}

− π س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

= ٦ س − ٢ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ π س^{٢}

مَ = ٦ − ٤ س − π س

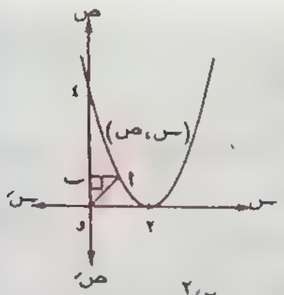
بوضع مَ = ٠ ∴ س = $\frac{٦}{٤ + \pi}$

مً = −٤ − π < ٠ قيمة عظمى

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) التى يجعل المساحة

أكبر ما يمكن هو $\frac{٦}{٤ + \pi}$

٧٧



نفرض أن أ = (س ، ص)

تنتمى لمنحنى الدالة

ص = (س − ٢)^{٢}

∴ م (مساحة Δ أ ب و)

= $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ س (س − ٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٢ س

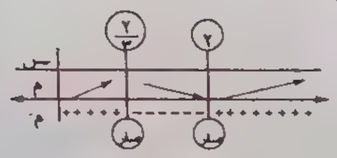
∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ٤ س + ٢ وبوضع $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠

∴ ٣ س^{٢} − ٨ س + ٤ = ٠

∴ (٣ س − ٢) (س − ٢) = ٠

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = ٢

∴ م تكون أكبر

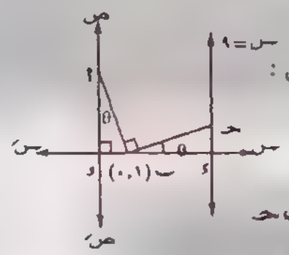


مساحة عند س = $\frac{٢}{٣}$

ومنها ص = $\frac{١٦}{٩}$

∴ النقطة أ = ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٩}$)

٧٨



من هندسة الشكل نجد أن :

أ ب = جتا θ

، ب ح = ٨ جتا θ

، وبفرض ل = أ ب + ب ح

∴ ل = جتا θ + ٨ جتا θ

، ∵ $\frac{ءل}{ءθ}$ = − جتا θ طتا θ + ٨ جتا θ طا θ

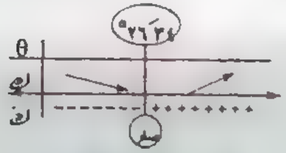
وبوضع $\frac{ءل}{ءθ}$ = ٠

∴ − جتا θ طتا θ + ٨ جتا θ طا θ = ٠

∴ ٨ $\frac{جا θ}{جتا^{٢} θ}$ = $\frac{جتا θ}{جا^{٢} θ}$

∴ ٨ جا^{٣} θ = جتا^{٢} θ ∴ طا^{٣} θ = $\frac{١}{٨}$

∴ طا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ ≃ ٢٦° ٣٤َ



∴ أ ب + ب ح أقل ما يمكن عندما طا θ = $\frac{١}{٢}$

٧٩

بفرض أن ق (ء) = ق (ء ح) = θ

فى Δ أ ء هـ أ ء = $\frac{١}{جا θ}$

فى Δ أ ب ح أ ح = $\frac{٢\sqrt{٣}}{جتا θ}$

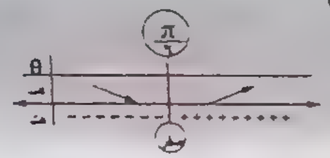
∵ هـ = أ ء + أ ح = $\frac{١}{جا θ}$ + $\frac{٢\sqrt{٣}}{جتا θ}$

∴ $\frac{ءهـ}{ءθ}$ = $\frac{-جتا θ}{جا^{٢} θ}$ + $\frac{٢\sqrt{٣} جا θ}{جتا^{٢} θ}$

وبوضع $\frac{ءهـ}{ءθ}$ = صفر ∴ ٣ $\sqrt{٣}$ جا^{٣} θ = جتا^{٢} θ

∴ طا^{٢} θ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ ∴ طا θ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$



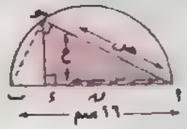
∴ أ ء + أ ح أصغر ما يمكن عندما θ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ طا (ح) = $\frac{أ ب}{ب ح}$ ⟸ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{أ ب}{٢\sqrt{٣}}$

∴ أ ب = ٢

∴ ء ب = ٣ − ١ = ٢ سم

٨٠



من هندسة الشكل نجد أن

$ص^2 = س \times ١٦$ (إقليدس)

، $ع = \sqrt{ص^2 - س^2} = \sqrt{١٦ س - س^2}$

∴ م (مساحة المثلث) $= \frac{١}{٢}$ س ع

$= \frac{١}{٢}$ س $\sqrt{١٦ س - س^2}$

∴ $م' = \frac{١}{٢} \times \frac{١٦ - ٢ س}{٢\sqrt{١٦ س - س^2}} + \frac{١}{٢}\sqrt{١٦ س - س^2}$

$= \frac{١٢ س - س^2}{\sqrt{١٦ س - س^2}}$

وبوضع $م' = ٠$ ∴ $١٢ س - س^2 = ٠$

∴ س (١٢ − س) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ١٢

، ∵ $م'$ تتغير اشارتها حول س = ١٢

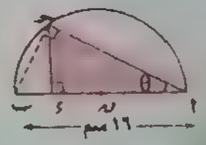
من الموجب إلى السالب

∴ توجد قيمة عظمى للمساحة عند س = ١٢

ومنها $ع = ٤\sqrt{٣}$

∴ $م = \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٤\sqrt{٣} = ٢٤\sqrt{٣}$ سم^2

حل آخر .



في Δ أ ب حـ

∵ أ ب = ١٦ سم

∴ أ حـ = ١٦ جتا θ

، في Δ أ حـ ء . ∴ أ ء = أ حـ جتا θ = ١٦ جتا^2 θ

∴ م (مساحة Δ أ حـ ء)

$= \frac{١}{٢} \times ١٦ جتا θ \times ١٦ جتا^2 θ \times جا θ$

$= ١٢٨ جتا^3 θ جا θ$

∴ $\frac{ءم}{ءθ}$

$= ١٢٨ [جتا^3 θ \times جتا θ + جا θ \times ٣ جتا^2 θ \times -جا θ]$

$= ١٢٨ [جتا^4 θ - ٣ جتا^2 θ جا^2 θ]$

∴ $\frac{ءم}{ءθ} = ٠$

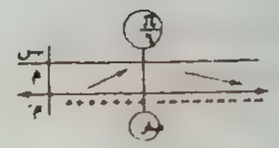
∴ $جتا^4 θ - ٣ جتا^2 θ جا^2 θ = ٠$

∴ جتا θ = ٠ ومنها $θ = \frac{π}{٢}$ (مرفوض)

أو $جتا^2 θ = ٣ جا^2 θ$ ∴ $طا^2 θ = \frac{١}{٣}$

∴ $طا θ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها $θ = \frac{π}{٦}$

، ∵ إشارة $م'$ تتغير



حول $θ = \frac{π}{٦}$

من الموجب إلى السالب

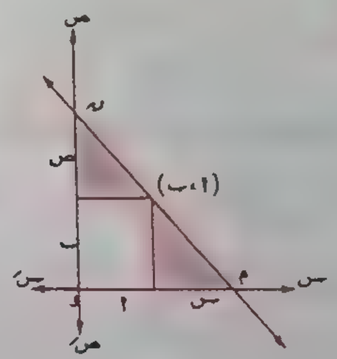
∴ توجد قيمة عظمى للمساحة عند $θ = \frac{π}{٦}$

، المساحة $= ١٢٨ جتا^3 \frac{π}{٦} جا \frac{π}{٦} = ٢٤\sqrt{٣}$ سم^2

٨١

① (حـ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (أ)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
㉑ (ب)			

٨٢



من تشابه المثلثات $\frac{س}{ب} = \frac{أ}{ص}$ ، $ص = \frac{أب}{س}$

مجموع الجزئين المقطوعين = ج = س + أ + ب + ص

∴ $ج = س + أ + ب + \frac{أب}{س}$ ∴ $ج' = ١ - \frac{أب}{س^2}$

بوضع ج' = ٠ ∴ $١ - \frac{أب}{س^2} = ٠$

∴ $س = \sqrt{أب}$

∴ $ج'' = + \frac{٢أب}{س^3} > ٠$ صغرى

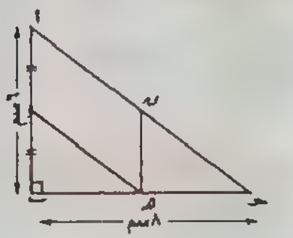
∴ أقل مجموع = س + ص + أ + ب

$= \sqrt{أب} + \frac{أب}{\sqrt{أب}} + أ + ب$

$= أ + ٢\sqrt{أب} + ب$

$= (\sqrt{أ} + \sqrt{ب})^2$

٨٣



نفرض أن :

م = ب هـ × هـ حـ

ويفرض أن :

ب هـ = س سم

∴ م = س (٨ − س) = ٨ س − س^2

∴ $م' = ٨ - ٢ س$

$م'' = -٢ <$ صفر (قيمة عظمى)

∴ $م' = ٠$ عندما س = ٤ سم

∴ هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

، ∵ $أ حـ = \sqrt{(٦)^2 + (٨)^2} = ١٠$ سم

نفرض أن : $ل = (أ ن)^2 + (ن حـ)^2$

ويفرض أن : أ ن = ص سم

∴ $ل = ص^2 + (١٠ - ص)^2$

$= ٢ ص^2 - ٢٠ ص + ١٠٠$

∴ $ل' = ٤ ص - ٢٠$

، $ل'' = ٤ > ٠$ (قيمة صغرى)

∴ $ل' = ٠$ عندما ص = ٥ ∴ ن منتصف $\overline{أ حـ}$

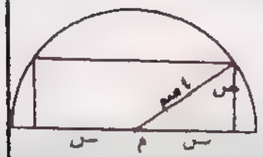
∴ الشكل أ ء هـ ن متوازى أضلاع

∴ مساحة الشكل = طول القاعدة × الارتفاع

$= ٣ \times ٤ = ١٢$ سم^2

٨٤

نفرض أن بعدى المستطيل هما :



٢ س ، ص سم

∴ $س^2 + ص^2 = (٤)^2$

∴ $ص = \sqrt{١٦ - س^2}$

∴ المساحة (م) = ٢ س ص = $٢ س \sqrt{١٦ - س^2}$

∴ $\frac{ءم}{ءس} = ٢ س \times \frac{-٢ س}{٢\sqrt{١٦ - س^2}} + ٢\sqrt{١٦ - س^2}$

$= \frac{-٢ س^2 + ٢(١٦ - س^2)}{٢\sqrt{١٦ - س^2}} = \frac{٣٢ - ٤ س^2}{\sqrt{١٦ - س^2}}$

، عندما $\frac{ءم}{ءس} = ٠$ ∴ $٣٢ - ٤ س^2 = ٠$

∴ $س^2 = ٨$ ∴ $س = ٢\sqrt{٢}$ سم

، ∴ $ص = ٢\sqrt{٢}$

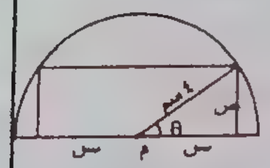
، ∵ $\frac{ءم}{ءس} > ٠$ عندما $س < ٢\sqrt{٢}$

، $\frac{ءم}{ءس} < ٠$ عندما $س > ٢\sqrt{٢}$

∴ عند $س = ٢\sqrt{٢}$ تكون م أكبر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل هما : $٤\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢}$ سم

حل آخر :



∵ س = ٤ جتا θ

، ص = ٤ جا θ

∴ المساحة (م) = ٢ س ص

= ٣٢ جا θ جتا θ

= ١٦ جا ٢ θ

$\frac{ءم}{ءس} = ٣٢ جتا ٢ θ$

، عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ ∴ جتا ٢ θ = ٠

∴ $٢ θ = \frac{π}{٢}$ ∴ $θ = \frac{π}{٤}$

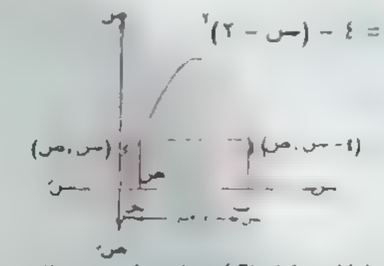
، ∵ $\frac{ء^2م}{ءس^2} = -٦٤ جا ٢ θ$ ، عند $θ = \frac{π}{٤}$

∴ $\frac{د^2 م}{د س^2} < ٠$

∴ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ تكون م أكبر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل هما ٨ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ، ٤ جا $\frac{\pi}{٤}$

أي ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٢ $\sqrt{٢}$ سم



∵ ص = ٤ - (س - ٢)^2

∵ محيط المستطيل (ح) = ٨ - ٤ س + ٢ ص

= ٨ - ٤ س + ٢ [٤ - (س - ٢)^2]

= -٢ س^2 + ٤ س + ٨

∴ $\frac{د ح}{د س}$ = -٤ س + ٤

∴ $\frac{د ح}{د س}$ = ٠ عندما س = ١

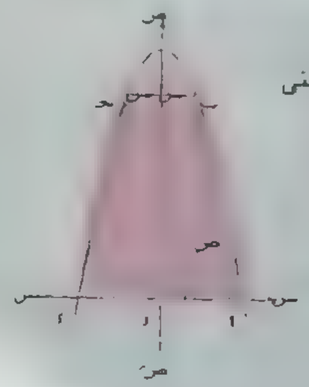
، ∵ $\frac{د^2 ح}{د س^2}$ = -٤ < ٠

∴ يكون المحيط أكبر ما يمكن عندما س = ١

وعندئذ تكون ص = ٣

وعندئذ تكون المساحة = ص (٤ - ٢ س) = ٣ (٢)

= ٦ وحدة مساحة.



لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

وبوضع ص = صفر

∴ ٩ - س^2 = ٠

∴ س = ± ٣

∴ ا = (٣ ، ٠)

، ء = (-٣ ، ٠)

ويفرض أن

ب = (س ، ص)

∴ م (مساحة شبه المنحرف ا ب حـ ء)

= $\frac{٦ + ٢ س}{٢}$ × ص

= (٣ + س) (٩ - س^2)

= ٢٧ + ٩ س - ٣ س^2 - س^3

∴ $\frac{د م}{د س}$ = ٩ - ٦ س - ٣ س^2 وبوضع $\frac{د م}{د س}$ = ٠

∴ س^2 + ٢ س - ٣ = ٠

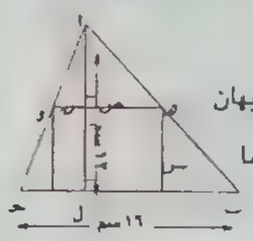
∴ (س - ١) (س + ٣) = ٠

∴ س = ١ أ، س = -٣ (مرفوض)

، ∵ $\frac{د^2 م}{د س^2}$ = -٦ - ٦ س

∴ $\left[\frac{د^2 م}{د س^2}\right]_{س = ١}$ = -١٢ < ٠

∴ المساحة قيمة عظمى ، م = ٣٢ وحدة مربعة.



∆∆ ا ء و ، ا ب حـ متشابهان

∴ تتناسب أطوال أضلاعهما

وارتفاعاتها

∴ $\frac{ص}{١٦} = \frac{ا ه}{ا ل} = \frac{١٢ - س}{١٢}$

ص = ١٦ - $\frac{٤}{٣}$ س

مساحة المستطيل = م = س ص = ١٦ س - $\frac{٤}{٣}$ س^2

مَ = ١٦ - $\frac{٨}{٣}$ س

مَ = صفر عند س = ٦

مً = - $\frac{٨}{٣}$ < ٠ عظمى

∴ بعدا المستطيل ذى أكبر مساحة هى ٦ ، ٨ سم

نرسم $\overline{ا ن}$ عموديا على

$\overline{ب حـ}$ يقطعه فى ن

، نفرض ا ء

ب حـ . س سم

، ا ن = ص سم

، مساحة المثلث . م سم

ومن هندسة الشكل نجد أن ∆ ا ء ك ~ ∆ ا ب حـ

∴ $\frac{ا ء}{ا ب} = \frac{ص - ٦}{ص}$ (١)

، ∆ ا ء ن ~ ∆ ا ب حـ

∴ $\frac{ا ء}{ا ب} = \frac{٨}{س}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{٨}{س} = \frac{ص - ٦}{ص}$ ∴ س = $\frac{٨ ص}{ص - ٦}$

∵ م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

= $\frac{١}{٢}$ ص × $\frac{٨ ص}{ص - ٦}$ = $\frac{٤ ص^2}{ص - ٦}$

∴ مَ = $\frac{٨ ص (ص - ٦) - ٤ ص^2}{(ص - ٦)^2}$

= $\frac{٨ ص^2 - ٤٨ ص - ٤ ص^2}{(ص - ٦)^2}$

= $\frac{٤ ص^2 - ٤٨ ص}{(ص - ٦)^2}$

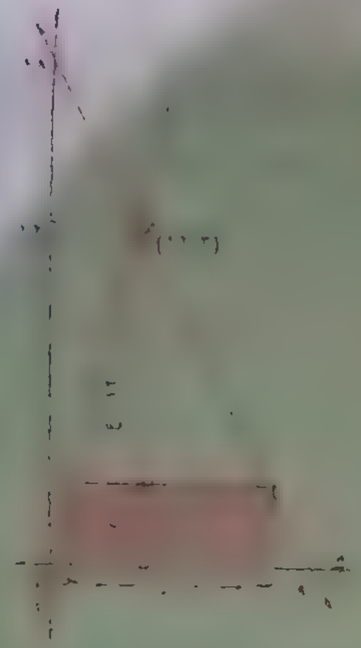
∴ مَ = ٠ عند ص = ٠ أ، ص = ١٢

، ∵ مً = $\frac{(٨ ص - ٤٨)(ص - ٦)^2 - ٢ (ص - ٦)(٤ ص^2 - ٤٨ ص)}{(ص - ٦)^4}$

= $\frac{٨ (ص - ٦)^2 - ٨ ص (ص - ١٢)}{(ص - ٦)^3}$

، عند ص = ١٢ تكون مً > ٠ (قيمة صغرى)

وعندها تكون أقل مساحة = $\frac{٤ × ١٤٤}{١٢ - ٦}$ = ٩٦ سم^2



لايجاد نقطة تقاطع المستقيمين نحل المعادلتين معا.

ص = ٤ س ، ص = ١٨ - ٢ س

∴ ٤ س = ١٨ - ٢ س ∴ ٦ س = ١٨

∴ س = ٣ ومنها ص = ١٢

∴ نقطة التقاطع د = (٣ ، ١٢)

، بوضع ١٨ - ٢ س = ٠

∴ س = ٩ ∴ ك (٩ ، ٠)

ومن تشابه المثلثات نجد أن $\frac{د ا}{د ك} = \frac{د ب}{د ل} = \frac{ا ء}{ك و}$

∴ $\frac{١٢ - ع}{١٢} = \frac{ر}{٩}$ ∴ ٤ ر = ٣٦ - ٣ ع

∴ ر = ٩ - $\frac{٣}{٤}$ ع

، ∵ م (مساحة المستطيل) = ع ر

∴ م = ع (٩ - $\frac{٣}{٤}$ ع) ∴ م = ٩ ع - $\frac{٣}{٤}$ ع^2

∴ مَ = ٩ - $\frac{٣}{٢}$ ع

وبوضع مَ = ٠ ∴ ع = ٦ ومنها ر = ٤,٥

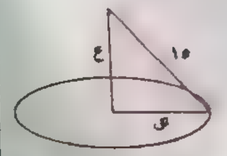
، ∵ مً = $\frac{-٣}{٢}$ < ٠

∴ توجد قيمة عظمى لمساحة المستطيل

، م = ٤,٥ × ٦ = ٢٧ وحدة مربعة.

∵ نق^{٢} = ٢٢٥ − ع^{٢}

، ∵ حجم المخروط = ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع



∴ ح = $\frac{\pi}{٣}$ ع (٢٢٥ − ع^{٢})

= $\frac{\pi}{٣}$ (٢٢٥ ع − ع^{٣})

حَ = $\frac{\pi}{٣}$ (٢٢٥ − ٣ ع^{٢})

بوضع حَ = ٠ ∴ ع^{٢} = $\frac{٢٢٥}{٣}$ = ٧٥

∴ ع = ٥ $\sqrt{٣}$

حَ = $\frac{\pi}{٣}$ (−٦ ع) كمية سالبة (قيمة عظمى)

∴ أكبر حجم (ح)$_{ع = ٥\sqrt{٣}}$

= $\frac{\pi}{٣}$ × ٥ $\sqrt{٣}$ (٢٢٥ − (٥ $\sqrt{٣}$)^{٢}) = ٢٥٠ $\sqrt{٣}$ π سم^{٣}

نفرض أن إحداثي ب هي (س ، ٠)

∴ حـ هي (س ، $\frac{١}{٢}$ س + ١)

، ء هي (س ، ١ − ٤ س − س^{٢})

طول $\overline{حـ ء}$ (م) = |ص$_{١}$ − ص$_{٢}$|

= (١ + ٤ س − س^{٢}) − ($\frac{١}{٢}$ س + ١)

م = $\frac{٧}{٢}$ س − س^{٢}

مَ = $\frac{٧}{٢}$ − ٢ س

بوضع مَ = ٠ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$

مَ = −٢ كمية سالبة قيمة عظمى

∴ إحداثي النقطة ب هي ($\frac{٧}{٤}$ ، ٠)

توجد نقط التقاطع للمنحنيين بحل معادلتيهما

من المعادلة الثانية ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢}

، في المعادلة الأولى ($\frac{١}{٤}$ س^{٢})^{٢} = ٤ س

س^{٤} = ٦٤ س ∴ س = ٠ أو س = ٤

يتقاطع المنحنيان في نقطتين و (٠ ، ٠) ، حـ (٤ ، ٤)

النقطة أ إحداثيها السيني س = ٢

∴ إحداثيها هو أ (٢ ، ٢ $\sqrt{٢}$)

م = $\frac{١}{٢}$ |Δ| حيث Δ = $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٢\sqrt{٢} & ١ \\ س & \frac{١}{٤}س^{٢} & ١ \end{vmatrix}$

∴ م = $\frac{١}{٢}$ |$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٢ $\sqrt{٢}$ س| ، ٠ < س < ٤

∴ م = س $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} حيث س ∈]٠ ، ٤[

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ س

بوضع $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٢ $\sqrt{٢}$

، ∵ $\frac{ء^{٢}م}{ءس^{٢}}$ = −$\frac{١}{٢}$ < ٠ (قيمة عظمى)

∴ عند س = ٢ $\sqrt{٢}$ مثلث أ و ب له أكبر مساحة

∴ أكبر مساحة م = ٢ $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ × (٢ $\sqrt{٢}$)^{٢}

= ٢ وحدة مربعة.

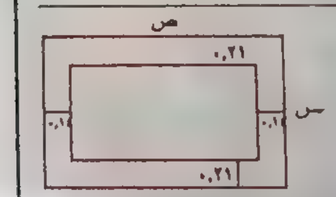
حل آخر :

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ‖$\overleftarrow{و أ}$ × $\overleftarrow{و ب}$‖

= $\frac{١}{٢}$ ‖(٢ ، ٢ $\sqrt{٢}$) × (س ، $\frac{١}{٤}$ س^{٢})‖

= $\frac{١}{٢}$ |$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٢ $\sqrt{٢}$ س| حيث ٠ < س < ٤

ثم نكمل الحل ...



س ص = ٢

∴ ص = $\frac{٢}{س}$

المساحة المستخدمة م = (س − ٢ × ٠,٢١)

(ص − ٢ × ٠,١٤)

م = س ص − ٠,٢٨ س − ٠,٤٢ ص + ٠,١١٧٦

م = ٢ − ٠,٢٨ س − $\frac{٠,٨٤}{س}$ + ٠,١١٧٦

مَ = −٠,٢٨ + $\frac{٠,٨٤}{س^{٢}}$ = $\frac{٠,٨٤ - ٠,٢٨ س^{٢}}{س^{٢}}$

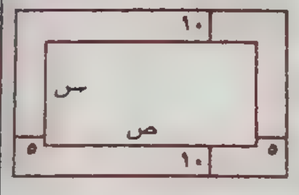
بوضع مَ = ٠ ∴ س^{٢} = ٣

∴ س = $\sqrt{٣}$ ، ∵ مَ$_{س = \sqrt{٣}}$ < ٠

∴ س = $\sqrt{٣}$ تجعل م قيمة عظمى

∴ أبعاد اللوحة هي س = $\sqrt{٣}$ متر

ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ متر.



مساحة الملصق

= ٨٠٠ = س ص

∴ ص = $\frac{٨٠٠}{س}$

مساحة المستطيل = (س + ٢٠) (ص + ١٠)

م = س ص + ١٠ س + ٢٠ ص + ٢٠٠

= ٨٠٠ + ١٠ س + ٢٠ × $\frac{٨٠٠}{س}$ + ٢٠٠

مَ = ١٠ − ١٦٠٠٠ س$^{-٢}$ مَ = ٣٢٠٠٠ س$^{-٣}$

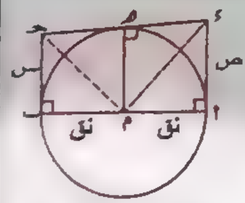
بوضع مَ = ٠ ∴ س = ٤٠

، ∵ مَ$_{س = ٤٠}$ > ٠

∴ س = ٤٠ تجعل المساحة أصغر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل = ٤٠ + ٢٠ = ٦٠ سم

، $\frac{٨٠٠}{٤٠}$ + ١٠ = ٣٠ سم



من تشابه Δ أ م ء ، حـ ب م

$\frac{ص}{نق}$ = $\frac{نق}{س}$ ص = $\frac{نق^{٢}}{س}$

مساحة شبه المنحرف (م)

م = $\frac{١}{٢}$ (س + ص) × ٢ نق

= نق س + نق ص = نق س + $\frac{نق^{٣}}{س}$

مَ = نق − $\frac{نق^{٣}}{س^{٢}}$

بوضع مَ = ٠ ∴ نق − $\frac{نق^{٣}}{س^{٢}}$ = ٠

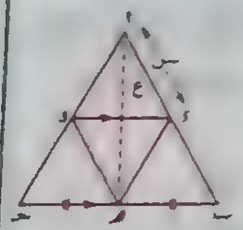
∴ س = نق مَ = $\frac{٢ نق^{٣}}{س^{٢}}$

∴ مَ$_{س = نق}$ > ٠

∴ م أصغر ما يمكن

م = $\frac{١}{٢}$ (نق + $\frac{نق^{٢}}{نق}$) × ٢ نق = ٢ نق^{٢}

من تشابه المثلثين أ و ، أ ب حـ



$\frac{س}{٢ ل}$ = $\frac{ع}{\sqrt{٣} ل}$

∴ ع = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س

م (مساحة المثلث ء ب و)

= $\frac{١}{٢}$ س ×

($\sqrt{٣}$ ل − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل س − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س^{٢}

مَ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س

بوضع مَ = ٠ ∴ س = ل

مَ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ < ٠ قيمة عظمى

أكبر مساحة = م$_{س = ل}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل (ل) − $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢}

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢}

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (٢ ل)^{٢} = $\sqrt{٣}$ ل^{٢}

∴ م = $\frac{١}{٤}$ مساحة Δ أ ب حـ

مساحة المسطح الخارجي (م)

(أ جاهـ + ب جاهـ)

+ (ب جاهـ + أ جاهـ)

أ ب جا² هـ + أ² جاهـ جتاهـ

+ ب² جاهـ جتاهـ + أ ب جا² هـ

= جاهـ جتاهـ (أ² + ب²) + أ ب (جا² هـ + جتا² هـ)

∴ م = جاهـ جتاهـ (أ² + ب²) + أ ب

∴ م = (أ² + ب²) (½ جا ٢هـ) + أ ب

∴ $\frac{دم}{دهـ}$ = ½ (أ² + ب²) × ٢ جتا ٢هـ

وبوضع $\frac{دم}{دهـ}$ = صفر

∴ (أ² + ب²) جتا ٢هـ = صفر

∴ جتا ٢هـ = صفر ∴ ٢هـ = ٩٠°

∴ ق (∠هـ) = ٤٥°

، ∵ $\frac{د²م}{دهـ²}$ = −٢ جا ٢هـ (أ² + ب²)

، عند ق (∠هـ) = ٤٥°

فإن $\frac{د²م}{دهـ²}$ = −٢ (أ² + ب²) < صفر

∴ عند ق (∠هـ) = ٤٥°

فإن المساحة تكون أكبر ما يمكن

∴ م = ½ (أ² + ب²) جا ٩٠° + أ ب

∴ ٢م = أ² + ب² + ٢ أ ب = (أ + ب)²

∴ م = $\frac{(أ + ب)^2}{2}$ وحدة مربعة.

من Δ ل س م

جا ٢هـ = $\frac{٨}{س}$ (١)

من Δ أ ل ب

جاهـ = $\frac{س}{١٢}$

، جا ٢هـ = ١ − ٢ جا² هـ = ١ − ٢ $\left(\frac{س}{١٢}\right)^2$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ هـ² = $\frac{س}{١}$ ، الاستقراء ...

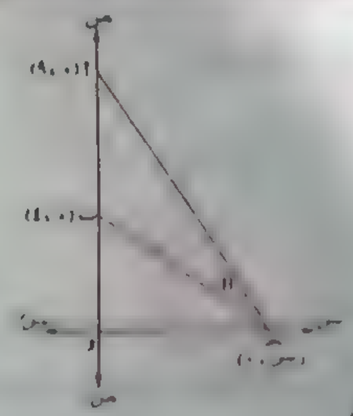
٢ هـ $\frac{دهـ}{دس}$ = $\frac{(س − ١)(٢ س − ١) − س (١)}{(س − ١)^2}$

= $\frac{٢ س² − ١٢ س}{(س − ١)^2}$

بوضع $\frac{دهـ}{دس}$ = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض)

أو س = ٦ ، ∵ $\left(\frac{د²هـ}{دس²}\right)_{س=٦}$ > ٠

∴ س = ٦ يجعل هـ أقل ما يمكن



بفرض أن

ق (∠أ ب جـ) = θ

∴ θ = ق (∠أ جـ و) − ق (∠ب جـ و)

∴ ظا θ = $\frac{ظا (∠أ جـ و) − ظا (∠ب جـ و)}{١ + ظا (∠أ جـ و) × ظا (∠ب جـ و)}$

∴ ظا θ = $\frac{\frac{٩}{س} − \frac{١}{س}}{١ + \frac{٩}{س} × \frac{١}{س}}$

∴ ظا θ = $\frac{٩ س − ١ س}{س² + ٣٦} = \frac{٥ س}{س² + ٣٦}$

∴ ظا² θ = $\frac{٥ س}{س² + ٣٦}$ ، $\frac{دθ}{دس}$ = $\frac{(س² + ٣٦) ٥ − ٥ س × ٢ س}{(س² + ٣٦)^2}$

∴ ظا² θ = $\frac{٥ س}{س² + ٣٦}$ ، $\frac{دθ}{دس}$ = $\frac{٣٠ − ٥ س²}{(س² + ٣٦)^2}$

، $\frac{دθ}{دس}$ = ٠ ∴ −٥ س² + ١٨٠ = ٠

∴ س² = ٣٦ ، ∵ هـ > ٠ ∴ س > ٠

∴ س = ٦ ∴ هـ (٦ ، ٠)

∴ θ أكبر ما يمكن عندما س = ٦

∴ إحداثي هـ لتكون θ أكبر ما يمكن هي (٦ ، ٠)

∵ المثلث أ ب جـ متساوي الساقين

∴ $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ وينصفه

∴ م ∈ $\overline{أ ء}$

، بفرض م ء = س سم

∴ أ ء = (١٥ + س) سم

∴ ب ء = $\sqrt{٢٢٥ − س²}$ سم

∴ مساحة Δ أ ب جـ (م)

= ½ ب جـ × أ ء = ب ء × أ ء

= $\sqrt{٢٢٥ − س²}$ × (١٥ + س)

∴ $\frac{دم}{دس}$ = $\frac{\sqrt{٢٢٥ − س²} − (١٥ + س) \frac{٢ س}{٢\sqrt{٢٢٥ − س²}}}{\sqrt{٢٢٥ − س²}}$

$\frac{٢٢٥ − س² − ١٥ س}{\sqrt{٢٢٥ − س²}}$

، وبوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠

∴ ٢ س² + ١٥ س − ٢٢٥ = ٠

∴ (٢ س − ١٥) (س + ١٥) = ٠

∴ س = $\frac{١٥}{٢}$ أو س = −١٥ (مرفوض)

∴ إشارة م′ تتغير على جانبي س = $\frac{١٥}{٢}$

من الموجب إلى السالب

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن

∴ مساحة المثلث = $\sqrt{٢٢٥ − \left(\frac{١٥}{٢}\right)^2}$ × $\left(١٥ + \frac{١٥}{٢}\right)$

= $\frac{٦٧٥}{٤}\sqrt{٣}$ سم² = ٢٩٢,٢٨ سم²

حل آخر :

∵ Δ أ م ب ≡ Δ أ م جـ

∴ ق (∠أ م ب)

= ق (∠أ م جـ) = هـ

∴ ق (∠ب م جـ) = (٣٦٠° − ٢هـ)

∴ م = ½ نق² جاهـ + ½ نق² جاهـ

+ ½ نق² جا (٣٦٠° − ٢هـ)

= نق² جاهـ − ½ نق² جا ٢هـ

∴ $\frac{دم}{دهـ}$ = نق² جتاهـ − ½ نق² × ٢ جتا ٢هـ

= نق² (جتاهـ − جتا ٢هـ)

، ∵ $\frac{دم}{دهـ}$ = ٠ ∴ جتاهـ − جتا ٢هـ = ٠

∴ جتاهـ − (٢ جتا² هـ − ١) = ٠

∴ ٢ جتا² هـ − جتاهـ − ١ = ٠

∴ (٢ جتاهـ + ١) (جتاهـ − ١) = ٠

∴ جتاهـ = ١ ∴ هـ = صفر (مرفوض)

أو جتاهـ = −½ ∴ هـ = ١٢٠° = $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع

، ∵ $\frac{د²م}{دهـ²}$ = −نق² جاهـ + ٢ نق² جا ٢هـ

∴ م″ $\left(\frac{٢\pi}{٣}\right)$ = $\frac{−\sqrt{٣}}{٢}$ نق² + ٢ نق² $\left(\frac{−\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$\frac{−٢\sqrt{٣}}{٢}$ نق² < صفر

∴ مساحة المثلث أكبر ما يمكن

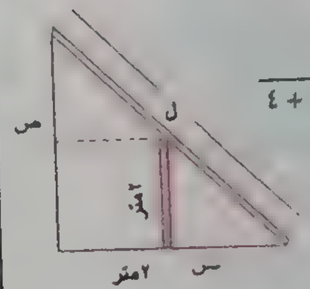
، مساحة المثلث = نق^{٢} ما ١٢٠ − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ما ٢٤٠

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق^{٢} + $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢} = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢}

وعندما نق = ١٥

∴ مساحة المثلث = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ × (١٥)^{٢} $\frac{٦٧٥\sqrt{٣}}{٤}$ سم^{٢}

≈ ٢٩٢,٢٨ سم^{٢}



من الشكل :

ل = $\sqrt{س^{٢} + ٤}$ + $\sqrt{ص^{٢} + ٤}$

من التشابه

$\frac{س}{٢} = \frac{٢}{ص}$

∴ ص = $\frac{٤}{س}$

∴ ل = $\sqrt{س^{٢} + ٤}$ + $\sqrt{(\frac{٤}{س})^{٢} + ٤}$

= $\sqrt{س^{٢} + ٤}$ + $\frac{٢}{س}$ $\sqrt{٤ + س^{٢}}$

= $\sqrt{س^{٢} + ٤}$ × (١ + $\frac{٢}{س}$)

لَ = $\frac{-٢}{س^{٢}}$ $\sqrt{س^{٢} + ٤}$ + $\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^{٢} + ٤}}$ (١ + $\frac{٢}{س}$)

= $\frac{-٢(س^{٢} + ٤) + س(س^{٢} + ٢س)}{س^{٢}\sqrt{س^{٢} + ٤}}$

= $\frac{-٢س^{٢} - ٨ + س^{٣} + ٢س^{٢}}{س^{٢}\sqrt{س^{٢} + ٤}}$ = $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢}\sqrt{س^{٢} + ٤}}$

لَ = ٠

٢

∴ س = ٢ قيمة صفرى

أقل طول للسلم ل$_{عند\ س = ٢}$ = $\sqrt{٤ + ٤}$ × (١ + $\frac{٢}{٢}$)

= ٤ $\sqrt{٢}$ متر.

ص$_{١}$ = ١٢ − س^{٢} صفر < س < ٢ $\sqrt{٣}$

ص$_{٢}$ = س^{٢} − ١٢ صفر < س < ٢ $\sqrt{٣}$

∴ بعدا المستطيل = ٢ س أفقيًا

رأسيًا = ص$_{١}$ − ص$_{٢}$ = (١٢ − س^{٢}) − (س^{٢} − ١٢)

= ١٢ − س^{٢} + ١٢ − س^{٢}

= ٢٤ − ٢ س^{٢}

∴ مساحة المستطيل = م = ٢ س × (٢٤ − ٢ س^{٢})

= ٤٨ س − ٤ س^{٣}

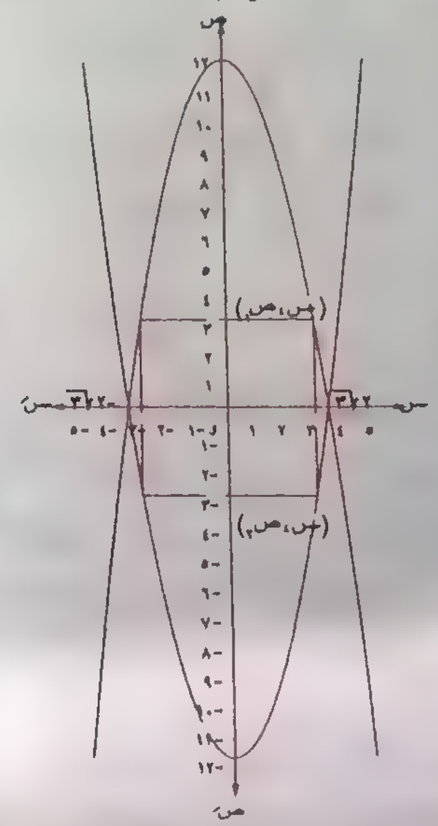
مَ = ٤٨ − ١٢ س^{٢}

بوضع مَ = ٠ س^{٢} = ٤ ∴ س = ٢

مَ = −٢٤ س

∴ مَ$_{س = ٢}$ < ٠ عند س = ٢ تكون لـ م قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة للمستطيل م = ٤٨ × ٢ − ٤ × ٢^{٣} = ٦٤



حجم المكعب = ($\sqrt{٢}$ ل)^{٣} = ٢ ل^{٣}

بفرض أن ارتفاع المنشور ع

، طول ضلع قاعدة المنشور = س حجم المنشور

= ($\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢}) × ع

∵ $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢} ع = ٢ ل^{٣} ∴ ع = $\frac{٨ ل^{٣}}{\sqrt{٣} س^{٢}}$

مساحة سطح المنشور = المساحة الجانبية + مساحتى القاعدتين

م = ٣ س × ع + $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢} × ٢

م = ٣ س × $\frac{٨ ل^{٣}}{\sqrt{٣} س^{٢}}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س^{٢}

= ٨ $\sqrt{٣}$ ل^{٣} س$^{-١}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س^{٢}

∴ مَ = −٨ $\sqrt{٣}$ ل^{٣} س$^{-٢}$ + $\sqrt{٣}$ س

، مَ = ١٦ $\sqrt{٣}$ ل^{٣} س$^{-٣}$ + $\sqrt{٣}$

مَ = ٠ ∴ س = ٢ ل وحدة طول

مَ$_{س = ٢ ل}$ > ٠

∴ م لها قيمة صغرى عند س = ٢ ل

نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ص

ونصف قطر الأسطوانة = س

(٢ س)^{٢} + ص^{٢} = (٢٠)^{٢}

٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠٠

∴ س = $\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^{٢}}$

م = ٢ π س × ص = ٢ π ص × $\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^{٢}}$

مَ = ٢ π ص × $\frac{-\frac{١}{٤} \times ٢ ص}{٢\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^{٢}}}$

+ ٢ π $\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^{٢}}$

= $\frac{-\frac{١}{٢} π ص^{٢} + ٢ π (١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^{٢})}{\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^{٢}}}$

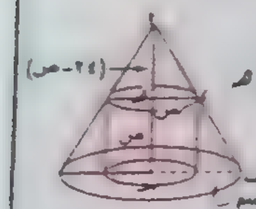
= $\frac{-π ص^{٢} + ٢٠٠ π}{\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^{٢}}}$

مَ = ٠

∴ ص = ١٠ $\sqrt{٢}$

مَ$_{ص = ١٠\sqrt{٢}}$ < ٠

∴ م أكبر ما يمكن عندما يكون الارتفاع = ١٠ $\sqrt{٢}$



من التشابه ΔΔ أ ب حـ ، أ و د

$\frac{س}{١٠} = \frac{٢٤ - ص}{٢٤}$

∴ ص = −٢,٤ س + ٢٤ ، ١٠ سم

حجم الأسطوانة ح = π نق^{٢} ع = π س^{٢} × ص

= π س^{٢} (−٢,٤ س + ٢٤)

= −٢,٤ π س^{٣} + ٢٤ π س^{٢}

حَ = −٧,٢ π س^{٢} + ٤٨ π س

حَ = ٠

∴ س = $\frac{٢٠}{٣}$ سم

حَ = −١٤,٤ π س + ٤٨ π

حَ$_{س = \frac{٢٠}{٣}}$ < ٠

∴ ح أكبر ما يمكن

∴ ص = −٢,٤ ($\frac{٢٠}{٣}$) + ٢٤ = ٨ سم

$س^2 - ص^2 = ا^2$

$ص = \sqrt{ا^2 - س^2}$

حجم المخروط $= \frac{1}{3} \pi ص^2 \times (ا - س)$

$ح = \frac{1}{3} \pi (ا^2 - س^2)(ا - س)$

$= \frac{1}{3} \pi (ا^3 - ا^2 س - ا س^2 - س^3)$

$\therefore ح' = \frac{1}{3} \pi (ا^2 - 2 ا س - 3 س^2)$

$ح' = 0 \Leftarrow (ا + س)(ا - 3 س) =$

$\therefore س = -ا$ (مرفوض) ، $س = \frac{1}{3} ا$

$ح'' = \frac{1}{3} \pi (-2 ا - 6 س)$

$ح''_{س = \frac{1}{3} ا} = \frac{1}{3} \pi (-2 ا - 2 ا) <$ قيمة عظمى

$ح_{س = \frac{1}{3} ا} = \frac{1}{3} \pi (ا^3 - \frac{1}{3} ا^3 - \frac{1}{3} ا^3 - \frac{1}{27} ا^3)$

$= \frac{32}{81} \pi ا^3$

حجم الكرة $= \frac{4}{3} \pi ا^3$

النسبة بينهما $\frac{ح_{مخروط}}{ح_{كرة}} = \frac{\frac{32}{81} \pi ا^3}{\frac{4}{3} \pi ا^3} = \frac{8}{27}$

$\therefore$ المسافة جـ ز $= \frac{\sqrt{ا^2 - س^2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{ا^2 - س^2}$

$\therefore$ المسافة ز س $= \frac{ا - س}{2} = \frac{1}{2}(ا - س)$

$ح = ح_1 - ح_2 = \frac{1}{2} \sqrt{ا^2 - س^2} - \frac{1}{2}(ا - س)$

$ح' = \frac{1}{2} \times \frac{2 س}{2\sqrt{ا^2 - س^2}} - \frac{1}{2} \times -1$

$= \frac{س}{\sqrt{ا^2 - س^2}} - \frac{1}{2}$

$ح' = 0 \Leftarrow \frac{س}{\sqrt{ا^2 - س^2}} = \frac{1}{2}$

$\therefore 4 س^2 = ا^2 - س^2$ بالتربيع

$\therefore 5 س^2 = ا^2 \quad \therefore س^2 = \frac{ا^2}{5}$

$س = \frac{ا}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} ا$ متر

$ح''_{س = \frac{ا}{\sqrt{5}}} <$ قيمة عظمى عند $س = \frac{ا}{\sqrt{5}}$

يجب على أوجد أن يبعد عن مسافة $\frac{ا}{\sqrt{5}}$ متر من نقطة أ

4 إجابات الوحدة

التكامل المحدد وتطبيقاته

المتطلبات العقلية

(١) $\int ٥\, ءس = ٥ س + ث$

(٢) $\int (س - ٣)(٢ س + ٧)\, ءس$

$= \int (٢ س^{٢} + س - ٢١)\, ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} - ٢١ س + ث$

(٣) $\int \left(س^{٣} + ٥ س + \frac{١}{س^{٢}}\right) ءس$

$= \int (س^{٣} + ٥ س + س^{-٢})\, ءس$

$= \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{٥}{٢} س^{٢} - س^{-١} + ث$

(٤) $\int \frac{١٢ س^{٤} + ٣}{س^{٢}}\, ءس$

$= \int (١٢ س^{٢} + ٣ س^{-٢})\, ءس$

$= ٤ س^{٣} - ٣ س^{-١} + ث$

(٥) $\int \left(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{٣}{٢}}\right) ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٢}} - ٢ س^{-\frac{١}{٢}} + ث$

(٦) $\int \frac{س + ١}{\sqrt{س}}\, ءس = \int \left(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{-\frac{١}{٣}}\right) ءس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + ث$

(٧) $\int (٢ س + ٣)^{٣}\, ءس = \frac{(٢ س + ٣)^{٤}}{٢ \times ٤} + ث$

$= \frac{١}{٨} (٢ س + ٣)^{٤} + ث$

(٨) $\int (٥ - ٣ س)^{٤}\, ءس = \frac{(٥ - ٣ س)^{٥}}{٥ \times -٣} + ث$

$= \frac{-١}{١٥} (٥ - ٣ س)^{٥} + ث$

(٩) $\int \sqrt{٤ س - ١}\, ءس = \int (٤ س - ١)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{(٤ س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٦} (٤ س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١٠) $\int \sqrt{٣ س + ١}\, ءس$

$= \int (٣ س + ١)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{(٣ س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times \frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{٣} (٣ س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١١) $\int \frac{ءس}{\sqrt{٣ - ٥ س}} = \int (٣ - ٥ س)^{-\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{(٣ - ٥ س)^{\frac{١}{٢}}}{-٥ \times \frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{-٢}{٥} (٣ - ٥ س)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٢) $\int \frac{ءس}{(٣ س - ٤)^{٦}} = \int (٣ س - ٤)^{-٦}\, ءس$

$= \frac{(٣ س - ٤)^{-٥}}{-٥ \times ٣} + ث = \frac{-١}{١٥} (٣ س - ٤)^{-٥} + ث$

(١٣) $\int (هـ^{٥ س + ٤} + ٢^{س} + ٣)\, ءس$

$= \frac{١}{٥} هـ^{٥ س + ٤} + \frac{٢^{س}}{لو_{هـ} ٢} + ٣ س + ث$

(١٤) $\int \left(\frac{٥}{س} + هـ^{س}\right) ءس$

$= ٥ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

(١٥) $\int ٨ س^{٦} \left(٥ - \frac{٢}{س}\right)^{٦}\, ءس$

$= ٨ \int (٥ س - ٢)^{٦}\, ءس$

$= ٨ \times \frac{(٥ س - ٢)^{٧}}{٥ \times ٧} + ث$

$= \frac{٨}{٣٥} (٥ س - ٢)^{٧} + ث$

(١٦) $\int (٩ س^{٢} - ٦ س + ١)^{٥}\, ءس$

$= \int [(٣ س - ١)^{٢}]^{٥}\, ءس$

$= \int (٣ س - ١)^{١٠}\, ءس$

$= \frac{(٣ س - ١)^{١١}}{٣ \times ١١} + ث$

$= \frac{١}{٣٣} (٣ س - ١)^{١١} + ث$

(١٧) $\int س \sqrt{\frac{٥}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}}\, ءس$

$= \int \sqrt{٥ س - ٣}\, ءس = \int (٥ س - ٣)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{(٥ س - ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٥ \times \frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{١٥} (٥ س - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١٨) $\int س^{٢} \sqrt{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}\, ءس = \int \sqrt{٢ - س}\, ءس$

$= \int (٢ - س)^{\frac{١}{٢}}\, ءس = \frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-١ \times \frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{-٣}{٤} (٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

---

(١) $ص = ٣ س^{٢} - ١$ ∴ $ءص = ٦ س\, ءس$

(٢) $ص = (٢ س + ٥)^{٤}$

∴ $ءص = ٤ (٢ س + ٥)^{٣} \times ٢\, ءس$

$= ٨ (٢ س + ٥)^{٣}\, ءس$

(٣) $ص = هـ^{٢ س - ٣}$

∴ $ءص = ٢ هـ^{٢ س - ٣}\, ءس$

(٤) $ص = \frac{س}{س - ١}$

∴ $ءص = \frac{(س - ١)(١) - س(١)}{(س - ١)^{٢}}\, ءس$

$= \frac{-١}{(س - ١)^{٢}}\, ءس$

(٥) $ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^{٣}$ ∴ $ءح = ٤ \pi نق^{٢}\, ءنق$

(٦) $ص = \sqrt{(٢ س + ٣)^{٥}} = (٢ س + ٣)^{\frac{٥}{٢}}$

∴ $ءص = \frac{٥}{٢} (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} \times ٢\, ءس$

$= ٥ (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\, ءس$

(٧) $ص = \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٣}$

∴ $ءص = ٣ \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢} \times \left(١ - \frac{١}{س^{٢}}\right) ءس$

(٨) $ص = هـ^{س^{٢} + ٣ س}$

∴ $ءص = هـ^{س^{٢} + ٣ س} \times (٢ س + ٣)\, ءس$

(٩) $ص = هـ^{جا ٢ س}$

∴ $ءص = هـ^{جا ٢ س} \times -جا ٢ س \times ٢\, ءس$

$= -٢ جا ٢ س \cdot هـ^{جا ٢ س}\, ءس$

(١٠) $ع = لو_{هـ} (س^{٢} + ١)$

∴ $ءع = \frac{١}{س^{٢} + ١} \times ٢ س\, ءس$

$= \frac{٢ س}{س^{٢} + ١}\, ءس$

(١١) $ع = \left(لو_{هـ} \frac{١٠}{س}\right)^{٢}$

∴ $ءع = ٢ \left(لو_{هـ} \frac{١٠}{س}\right) \times \frac{١}{\left(\frac{١٠}{س}\right)} \times \frac{-١٠}{س^{٢}}\, ءس$

$= \frac{-٢}{س} لو_{هـ} \frac{١٠}{س}\, ءس$

(١٢) $ع = لو_{هـ} ظا (٣ س - ١)$

∴ $ءع = \frac{-قا^{٢} (٣ س - ١) \times ٣}{ظا (٣ س - ١)}\, ءس$

$= \frac{-٣ قا^{٢} (٣ س - ١)}{ظا (٣ س - ١)}\, ءس$

---

(١) $ص = ع \cdot ل$ ∴ $ءص = ع \cdot ءل + ل \cdot ءع$

(٢) $ص = \frac{ع}{ل}$ ∴ $ءص = \frac{ل \cdot ءع - ع \cdot ءل}{ل^{٢}}$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

∴ $٢ س \cdot ءس + ٢ ص \cdot ءص = ٠$

∴ $ءص = \frac{-٢ س\, ءس}{٢ ص}$

∴ $ءص = -\frac{س}{ص} \cdot ءس$

15 تكامل الدوال

أولاً تكامل الدوال الأساسية

① $\int ٢\text{س}\,(\text{س}^{٢}+٣)^{٤}\,\text{ء س}$

، بوضع $\text{ع} = \text{س}^{٢}+٣$ ∴ $\text{ء ع} = ٢\text{س}\,.\,\text{ء س}$

∴ $\text{ء س} = \frac{\text{ء ع}}{٢\text{س}}$

∴ التكامل $= \int ٢\text{س} \times \text{ع}^{٤} \times \frac{\text{ء ع}}{٢\text{س}}$

$= \int \frac{٢}{٢}\,\text{ع}^{٤}\,\text{ء ع}$

$= \frac{٢}{٢} \times \frac{\text{ع}^{٥}}{٥} + \text{ث} = \frac{٢}{١٠}\,\text{ع}^{٥} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{١٠}\,(\text{س}^{٢}+٣)^{٥} + \text{ث}$

② $\int \text{س}^{٣}\,(٢\text{س}^{٤}-٧)^{٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٨} \int ٨\text{س}^{٣}\,(٢\text{س}^{٤}-٧)^{٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{(٢\text{س}^{٤}-٧)^{٦}}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤٨}\,(٢\text{س}^{٤}-٧)^{٦} + \text{ث}$

③ $\int (\text{س}^{٢}-٤\text{س}+١)^{-٣} \times (\text{س}-٢)\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (٢\text{س}-٤)\,(\text{س}^{٢}-٤\text{س}+١)^{-٣}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^{٢}-٤\text{س}+١)^{-٢}}{-٢} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٤}\,(\text{س}^{٢}-٤\text{س}+١)^{-٢} + \text{ث}$

④ $\int (١-\text{س}^{٢})\,(٣\text{س}-\text{س}^{٣})^{٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int (٣-٣\text{س}^{٢})\,(٣\text{س}-\text{س}^{٣})^{٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(٣\text{س}-\text{س}^{٣})^{٦}}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٨}\,(٣\text{س}-\text{س}^{٣})^{٦} + \text{ث}$

⑤ $\int \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int ٢\text{س}\,(\text{س}^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\,(\text{س}^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

⑥ $\int (\text{س}-١)\sqrt{\text{س}^{٢}-٢\text{س}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (٢\text{س}-٢)\,(\text{س}^{٢}-٢\text{س})^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^{٢}-٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{٨}\,(\text{س}^{٢}-٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

⑦ $\int \frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣}-٤)^{٥}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int ٣\text{س}^{٢}\,(\text{س}^{٣}-٤)^{-٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(\text{س}^{٣}-٤)^{-٤}}{-٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{١٢}\,(\text{س}^{٣}-٤)^{-٤} + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{\text{س}^{٤}}{(\text{س}^{٥}+١)^{٧}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٥} \int ٥\text{س}^{٤}\,(\text{س}^{٥}+١)^{-٧}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٥} \times \frac{(\text{س}^{٥}+١)^{-٦}}{-٦} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٣٠}\,(\text{س}^{٥}+١)^{-٦} + \text{ث}$

⑨ $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٨)^{٣}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int (٢\text{س})\,(\text{س}^{٢}+٨)^{-٣}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^{٢}+٨)^{-٢}}{-٢} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٤}\,(\text{س}^{٢}+٨)^{-٢} + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{\text{س}^{٢}+١}{(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{٦}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int (٣\text{س}^{٢}+٣)\,(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{-٦}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{-٥}}{-٥} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{١٥}\,(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{-٥} + \text{ث}$

⑪ $\int \frac{٥\text{س}}{٣\text{س}^{٢}-١}\,\text{ء س}$

$= ٥ \times \frac{١}{٦} \int \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^{٢}-١}\,\text{ء س}$

$= \frac{٥}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|٣\text{س}^{٢}-١| + \text{ث}$

⑫ $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٥}\,\text{ء س} = \frac{١}{٣} \int \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{س}^{٣}+٥| + \text{ث}$

⑬ $\int \frac{٢\text{ص}^{٣}}{\text{ص}^{٤}+٥}\,\text{ء ص} = \frac{١}{٢} \int \frac{٤\text{ص}^{٣}}{\text{ص}^{٤}+٥}\,\text{ء ص}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص}^{٤}+٥| + \text{ث}$

⑭ $\int \frac{١٢\text{س}+٢}{٣\text{س}^{٢}+\text{س}+٧}\,\text{ء س}$

$= ٢ \int \frac{٦\text{س}+١}{٣\text{س}^{٢}+\text{س}+٧}\,\text{ء س}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|٣\text{س}^{٢}+\text{س}+٧| + \text{ث}$

⑮ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١+٣\text{س}^{٢}}}\,\text{ء س} = \frac{١}{٦} \int \frac{٦\text{س}}{\sqrt{١+٣\text{س}^{٢}}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٦} \times ٢\sqrt{١+٣\text{س}^{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}\sqrt{١+٣\text{س}^{٢}} + \text{ث}$

⑯ $\int \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{٢\text{س}^{٤}+٣}}\,\text{ء س} = \frac{١}{٨} \int \frac{٨٠\text{س}^{٣}}{\sqrt{٢\text{س}^{٤}+٣}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٨} \times ٢\sqrt{٢\text{س}^{٤}+٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤}\sqrt{٢\text{س}^{٤}+٣} + \text{ث}$

⑰ $\int \frac{\text{س}^{٢}+١}{\sqrt{\text{س}^{٣}+٣\text{س}+٥}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int \frac{٣\text{س}^{٢}+٣}{\sqrt{\text{س}^{٣}+٣\text{س}+٥}}\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \times ٢\sqrt{\text{س}^{٣}+٣\text{س}+٥} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}+٣\text{س}+٥} + \text{ث}$

⑱ $\int \frac{٢\text{س}-٥}{\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٧)^{٢}}}\,\text{ء س}$

$= \int (٢\text{س}-٥)\,(\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٧)^{-\frac{٢}{٣}}\,\text{ء س}$

$= \frac{(\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٧)^{-\frac{١}{٣}}}{-\frac{١}{٣}} + \text{ث}$

$= -٣\,(\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٧)^{-\frac{١}{٣}} + \text{ث}$

⑲ $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}\text{ء س}$

$= -\int \left(\frac{-١}{\text{س}^{٢}}\right)\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}\text{ء س}$

$= \frac{-\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٤}}{٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٤}\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٤} + \text{ث}$

⑳ $\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}}+٢)^{٥}}$

$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \times (\sqrt{\text{س}}+٢)^{-٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{٢\,(\sqrt{\text{س}}+٢)^{-٤}}{-٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٢}\,(\sqrt{\text{س}}+٢)^{-٤} + \text{ث}$

㉑ $\int \frac{(\sqrt{\text{س}}+٣)^{٥}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ء س}$

$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,(\sqrt{\text{س}}+٣)^{٥}\,\text{ء س}$

$= \frac{٢\,(\sqrt{\text{س}}+٣)^{٦}}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}\,(\sqrt{\text{س}}+٣)^{٦} + \text{ث}$

㉒ $\int \sqrt{\frac{١+\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\,\text{ء س} = \int \frac{(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ء س}$

$= ٢ \int \left(\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right)(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$

$= ٢ \times \frac{(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٤}{٣}\,(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٢٣) $\int (٢س - ٣)^{٥} (٤س + ١)^{٥} (٨س - ٥)\, ءس$

$= \int (٨س - ٥)(٨س^{٢} - ١٠س - ٣)^{٥}\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (١٦س - ١٠)$

$(٨س^{٢} - ١٠س - ٣)^{٥}\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٨س^{٢} - ١٠س - ٣)^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{١٢} (٨س^{٢} - ١٠س - ٣)^{٦} + ث$

(٢٤) $\int \sqrt{س^{٢} - ٣س^{٢} + ٢س - ٤}\, (س - ١)^{٢}\, ءس$

$= \int (س^{٢} - ٢س + ١)$

$(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س - ٤)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (٣س^{٢} - ٦س + ٢)$

$(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س - ٤)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س - ٤)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٩} (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س - ٤)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

---

(١) $\int س (س - ٥)^{٢}\, ءس$

بوضع ع = س − ٥ ∴ س = ع + ٥

ءس = ءع

∴ $\int س (س - ٥)^{٢}\, ءس$

$= \int (ع + ٥)(ع)^{٢}\, ءع$

$= \int (ع^{٣} + ٥ع^{٢})\, ءع$

$= \frac{١}{٤} ع^{٤} + \frac{٥}{٣} ع^{٣} + ث$

$= \frac{١}{٤} (س - ٥)^{٤} + \frac{٥}{٣} (س - ٥)^{٣} + ث$

حل آخر

$\int س (س - ٥)^{٢}\, ءس$

$= \int (س - ٥ + ٥)(س - ٥)^{٢}\, ءس$

$= \int [(س - ٥)^{٣} + ٥ (س - ٥)^{٢}]\, ءس$

$= \frac{١}{٤} (س - ٥)^{٤} + \frac{٥}{٣} (س - ٥)^{٣} + ث$

(٢) $\int س (٢س + ٣)^{٣}\, ءس$

، بوضع ع = ٢س + ٣ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ (ع − ٣)

∴ ءع = ٢ءس ∴ ءس = $\frac{١}{٢}$ ءع

∴ $\int س (٢س + ٣)^{٣}\, ءس$

$= \int \frac{١}{٢} (ع - ٣)(ع)^{٣} \times \frac{١}{٢}\, ءع$

$= \int (\frac{١}{٤} ع^{٣} - \frac{٣}{٤} ع^{٢})\, ءع$

$= \frac{١}{١٦} ع^{٤} - \frac{٣}{١٢} ع^{٣} + ث$

$= \frac{١}{١٦} (٢س + ٣)^{٤} - \frac{٣}{١٢} (٢س + ٣)^{٣} + ث$

(٣) $\int س \sqrt{س + ٤}\, ءس$ بوضع ع = س + ٤

∴ س = ع − ٤ ∴ ءس = ءع

∴ $\int س \sqrt{س + ٤}\, ءس$

$= \int (ع - ٤)\sqrt{ع}\, ءع$

$= \int (ع^{\frac{٣}{٢}} - ٤ع^{\frac{١}{٢}})\, ءع$

$= \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٥} (س + ٤)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} (س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٤) $\int س \sqrt{٢س + ٥}\, ءس$ بوضع ع = ٢س + ٥

∴ س = $\frac{١}{٢}$ (ع − ٥) ∴ ءس = $\frac{١}{٢}$ ءع

∴ $\int س \sqrt{٢س + ٥}\, ءس$

$= \int \frac{١}{٢} (ع - ٥)\sqrt{ع} \times \frac{١}{٢}\, ءع$

$= \int (\frac{١}{٤} ع^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٥}{٤} ع^{\frac{١}{٢}})\, ءع$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٤} \times \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{١٠} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٦} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{١٠} (٢س + ٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٦} (٢س + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٥) $\int س^{٢} \sqrt{س + ٢}\, ءس$ ، بوضع ع = $\sqrt{س + ٢}$

∴ س = $ع^{٢}$ − ٢ ∴ ءس = ٢ ع ءع

∴ $\int س^{٢} \sqrt{س + ٢}\, ءس$

$= \int (ع^{٢} - ٢)^{٢} . ع \times ٢ ع\, ءع$

$= \int (ع^{٢} - ٢)^{٢} \times ٢ ع^{٢}\, ءع$

$= \int ٢ ع^{٢} (ع^{٤} - ٤ ع^{٢} + ٤)\, ءع$

$= \int (٢ ع^{٦} - ٨ ع^{٤} + ٨ ع^{٢})\, ءع$

$= \frac{٢}{٧} ع^{٧} - \frac{٨}{٥} ع^{٥} + \frac{٨}{٣} ع^{٣} + ث$

$= \frac{٢}{٧} (س + ٢)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٨}{٥} (س + ٢)^{\frac{٥}{٢}}$

$+ \frac{٨}{٣} (س + ٢)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٦) $\int (س^{٢} - ١)\sqrt{س + ١}\, ءس$

بوضع ع = $\sqrt{س + ١}$ ∴ س = $ع^{٢}$ − ١

∴ ءس = ٢ ع . ءع

∴ $\int (س^{٢} - ١)\sqrt{س + ١}\, ءس$

$= \int ((ع^{٢} - ١)^{٢} - ١) . ع . ٢ ع\, ءع$

$= \int (ع^{٤} - ٢ ع^{٢}) \times ٢ ع^{٢}\, ءع$

$= \int (٢ ع^{٦} - ٤ ع^{٤})\, ءع$

$= \frac{٢}{٧} ع^{٧} - \frac{٤}{٥} ع^{٥} + ث$

$= \frac{٢}{٧} (س + ١)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

(٧) $\int س^{٢} \sqrt{س - ٣}\, ءس$ بوضع ع = $\sqrt{س - ٣}$

∴ س = $ع^{٢}$ + ٣ ∴ ءس = ٢ $ع^{٢}$. ءع

∴ $\int س^{٢} \sqrt{س - ٣}\, ءس$

$= \int (ع^{٢} + ٣)^{٢} \times ع . ٢ ع^{٢}\, ءع$

$= \int ٢ ع^{٢} (ع^{٦} + ٦ ع^{٢} + ٩)\, ءع$

$= \int (٢ ع^{٨} + ١٨ ع^{٦} + ٢٧ ع^{٣})\, ءع$

$= \frac{٢}{١٠} ع^{١٠} + \frac{١٨}{٧} ع^{٧} + \frac{٢٧}{٤} ع^{٤} + ث$

$= \frac{٢}{١٠} (س - ٣)^{\frac{١٠}{٢}} + \frac{١٨}{٧} (س - ٣)^{\frac{٧}{٢}}$

$+ \frac{٢٧}{٤} (س - ٣)^{\frac{٤}{٢}} + ث$

(٨) $\int س^{٢} \sqrt{١ - س^{٢}}\, ءس$

بوضع ع = ١ − $س^{٢}$ ∴ $س^{٢}$ = ١ − ع

∴ س = $\sqrt{١ - ع}$

∴ ءس = $-\frac{١}{٢}(١ - ع)^{-\frac{١}{٢}}\, ءع$

∴ $\int س^{٢} \sqrt{١ - س^{٢}}\, ءس$

$= \int (١ - ع)^{\frac{١}{٢}} \times \sqrt{ع} \times -\frac{١}{٢} (١ - ع)^{-\frac{١}{٢}}\, ءع$

$= -\frac{١}{٢} \int (١ - ع) \times ع^{\frac{١}{٢}}\, ءع$

$= -\frac{١}{٢} \int (ع^{\frac{١}{٢}} - ع^{\frac{٣}{٢}})\, ءع$

$= -\frac{١}{٢} \int (\frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}})\, ءع$

$= -\frac{١}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} + ث$

$= -\frac{١}{٣} (١ - س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٥} (١ - س^{٢})^{\frac{٥}{٢}} + ث$

(٩) $\int س^{٣} \sqrt{(س^{٢} - ١)^{٣}}\, ءس$

بوضع ع = $س^{٢}$ − ١ ∴ $س^{٢}$ = ع + ١

∴ ٢ س ءس = ءع

∴ $\int س^{٣} \sqrt{(س^{٢} - ١)^{٣}} . س\, ءس$

$= \int (ع + ١) ع^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{٢}\, ءع$

$= \frac{١}{٢} \int (ع^{\frac{٧}{٢}} + ع^{\frac{٣}{٢}})\, ءع$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{١٢} ع^{\frac{١٢}{٥}} + \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٧} ع^{\frac{٧}{٥}} + ث$

$= \frac{٥}{٢٤} ع^{\frac{١٢}{٥}} + \frac{٥}{١٤} ع^{\frac{٧}{٥}} + ث$

$= \frac{٥}{٢٤} (س^{٢} - ١)^{\frac{١٢}{٥}} + \frac{٥}{١٤} (س^{٢} - ١)^{\frac{٧}{٥}} + ث$

(١٠) $\int س^{٥} (س^{٢} + ٢)^{٤}\, ءس$

بوضع ع = $س^{٢}$ + ٢ ∴ $س^{٢}$ = ع − ٢

∴ ءع = ٢ س . ءس

∴ $\int س^{٥} (س^{٢} + ٢)^{٤}\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (س^{٢})^{٢} (س^{٢} + ٢)^{٤} \times ٢ س . ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (ع - ٢)^{٢} . ع^{٤} \times ءع$

$= \frac{١}{٢} \int (ع^{٦} - ٤ ع^{٥} + ٤ ع^{٤})\, ءع$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٧} ع^{٧} - \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٦} ع^{٦}$

$+ \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٥} ع^{٥} + ث$

$= \frac{١}{١٤} ع^{٧} - \frac{١}{٣} ع^{٦} + \frac{٢}{٥} ع^{٥} + ث$

$= \frac{١}{١٤} (س^{٢} + ٢)^{٧} - \frac{١}{٣} (س^{٢} + ٢)^{٦}$

$+ \frac{٢}{٥} (س^{٢} + ٢)^{٥} + ث$

(١١) $\int \text{س}^{٣}\,(\text{س}^{٢}-١)^{٥}\,\text{ءس}$

بوضع $\text{ع} = \text{س}^{٢} - ١$ ∴ $\text{س}^{٢} = \text{ع} + ١$

∴ $٢\,\text{س}\,.\,\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \text{س}^{٣}\,(\text{س}^{٢}-١)^{٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٢}\,(\text{س}^{٢}-١)^{٥} \times ٢\,\text{س}\,.\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ع}+١)\,(\text{ع})^{٥}\,.\,\text{ءع}$

$= \int \left(\frac{١}{٢}\,\text{ع}^{٦} + \frac{١}{٢}\,\text{ع}^{٥}\right).\,\text{ءع}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٧}\,\text{ع}^{٧} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦}\,\text{ع}^{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٤}\,\text{ع}^{٧} + \frac{١}{١٢}\,\text{ع}^{٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٤}\,(\text{س}^{٢}-١)^{٧} + \frac{١}{١٢}\,(\text{س}^{٢}-١)^{٦} + \text{ث}$

(١٢) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$ بوضع $\text{ع} = \text{س} + ١$

∴ $\text{س} = \text{ع} - ١$ $\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \frac{\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{ع}-١}{\text{ع}}\,\text{ءع} = \int \left(١ - \frac{١}{\text{ع}}\right)\text{ءع}$

$= \text{ع} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{ث}$

$= \text{س} + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$

حل آخر :

$\int \frac{\text{س}+١-١}{\text{س}+١}\,\text{ءس} = \int \left(١ - \frac{١}{\text{س}+١}\right)\text{ءس}$

$= \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$

(١٣) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}-١}\,\text{ءس}$ بوضع $\text{ع} = \text{س} - ١$

∴ $\text{س} = \text{ع} + ١$ ∴ $\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}-١}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{ع}+١)^{٢}}{\text{ع}}\,\text{ءع}$

$= \int \frac{\text{ع}^{٢}+٢\,\text{ع}+١}{\text{ع}}\,\text{ءع}$

$= \int \left(\text{ع} + ٢ + \frac{١}{\text{ع}}\right)\text{ءع}$

$= \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} + ٢\,\text{ع}$

$+ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}(\text{س}-١)^{٢} + ٢\,(\text{س}-١)$

$+ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{ث}$

حل آخر :

$\int \left(\frac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}-١} + \frac{١}{\text{س}-١}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{س}+١ + \frac{١}{\text{س}-١}\right)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{ث}$

(١٤) $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس}$

بوضع $\text{ع} = \text{س} + ١$ ∴ $\text{س} = \text{ع} - ١$

∴ $\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ع}-١}{\text{ع}^{٢}}\,\text{ءع}$

$= \int \left(\frac{١}{\text{ع}} - \text{ع}^{-٢}\right)\text{ءع} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| - \frac{\text{ع}^{-١}}{-١} + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \frac{١}{\text{س}+١} + \text{ث}$

(١٥) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\,\text{س}+٢}}\,\text{ءس}$ بوضع $٢\,\text{ع} = ٢\,\text{س} + ٢$

∴ $\text{س} = \text{ع} - ١$ ∴ $\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\,\text{س}+٢}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ع}-١}{\sqrt{٢\,\text{ع}}}\,\text{ءع}$

$= \int \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{ءع}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\text{ع}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٣}(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}} - \sqrt{٢}\,(\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(١٦) $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}-١}}\,\text{ءس}$ بوضع $\text{ع} = \text{س} - ١$

∴ $\text{س} = \text{ع} + ١$ ∴ $\text{ءع} = \text{ءس}$

∴ $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}-١}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ع}+١+١}{\sqrt{\text{ع}}}\,\text{ءع}$

$= \int \left((\text{ع})^{\frac{١}{٢}} + ٢\,\text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{ءع}$

$= \frac{\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٢ \times \frac{\text{ع}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + ٤\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}(\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ ٤\,(\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(١٧) $\int \frac{٥\,\text{م}\,\text{ءم}}{\sqrt{٤-٢\,\text{م}}}$ بوضع $\text{ن} = ٤ - ٢\,\text{م}$

∴ $\text{م} = ٢ - \frac{١}{٢}\,\text{ن}$ ∴ $\text{ءم} = -\frac{١}{٢}\,\text{ءن}$

∴ $\int \frac{٥\,\text{م}\,\text{ءم}}{\sqrt{٤-٢\,\text{م}}} = \int \frac{٥\left(٢-\frac{١}{٢}\text{ن}\right)}{\sqrt{\text{ن}}} \times \frac{-١}{٢}\,\text{ءن}$

$= \int \frac{-٥}{٢}\left(٢\,\text{ن}^{\frac{-١}{٢}} - \frac{١}{٢}\,\text{ن}^{\frac{١}{٢}}\right)\text{ءن}$

$= \int \left(-٥\,\text{ن}^{\frac{-١}{٢}} + \frac{٥}{٤}\,\text{ن}^{\frac{١}{٢}}\right)\text{ءن}$

$= -٥ \times \frac{\text{ن}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٤} \times \frac{\text{ن}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= -١٠\,\text{ن}^{\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٦}\,\text{ن}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= -١٠\,(٤ - ٢\,\text{م})^{\frac{١}{٢}}$

$+ \frac{٥}{٦}\,(٤ - ٢\,\text{م})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(١٨) $\int \frac{\text{س}\,\text{ءس}}{\sqrt{٤\,\text{س}-١}}$ ، بوضع $\text{ع} = ٤\,\text{س} - ١$

∴ $\text{س} = \frac{١}{٤}\,\text{ع} + \frac{١}{٤}$ ∴ $\text{ءس} = \frac{١}{٤}\,\text{ءع}$

∴ $\int \frac{\text{س}\,\text{ءس}}{\sqrt{٤\,\text{س}-١}}$

$= \int \frac{\frac{١}{٤}\,\text{ع} + \frac{١}{٤}}{\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{١}{٤}\,\text{ءع}$

$= \int \left(\frac{١}{١٦}\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{١٦}\,\text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{ءع}$

$= \frac{١}{٢٤}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٨}\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٤}\,(٤\,\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٨}\,(٤\,\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(١٩) $\int \frac{\text{س}\,\text{ءس}}{\sqrt[٥]{(\text{س}+١)^{٣}}}$ ، بوضع $\text{ع} = \text{س} + ١$

∴ $\text{س} = \text{ع} - ١$ ∴ $\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \frac{\text{س}\,\text{ءس}}{\sqrt[٥]{(\text{س}+١)^{٣}}} = \int \frac{\text{ع}-١}{\text{ع}^{\frac{٣}{٥}}}\,.\,\text{ءع}$

$= \int \left(\text{ع}^{\frac{٢}{٥}} - \text{ع}^{-\frac{٣}{٥}}\right)\text{ءع}$

$= \frac{٥}{٧}\,\text{ع}^{\frac{٧}{٥}} - \frac{٥}{٢}\,\text{ع}^{\frac{٢}{٥}} + \text{ث}$

$= \frac{٥}{٧}\,(\text{س}+١)^{\frac{٧}{٥}}$

$- \frac{٥}{٢}\,(\text{س}+١)^{\frac{٢}{٥}} + \text{ث}$

(٢٠) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}}{(\sqrt{\text{س}}-١)^{٢}}$ بوضع $\text{ع} = \sqrt{\text{س}} - ١$

∴ $\text{س} = (\text{ع}+١)^{٢}$ ∴ $\text{ءس} = ٢\,(\text{ع}+١)\,\text{ءع}$

∴ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}}{(\sqrt{\text{س}}-١)^{٢}}$

$= \int \frac{\text{ع}+١}{\text{ع}^{٢}} \times ٢\,(\text{ع}+١)\,\text{ءع}$

$= \int \frac{٢\,(\text{ع}^{٢}+٢\,\text{ع}+١)}{\text{ع}^{٢}}\,\text{ءع}$

$= \int \left(٢\,\text{ع}^{-٢} + ٤\,\text{ع}^{-١} + ٢\,\text{ع}^{-٢}\right)\text{ءع}$

$= \frac{٢\,\text{ع}^{-٣}}{-٣} + \frac{٤\,\text{ع}^{-٢}}{-٢} + \frac{٢\,\text{ع}^{-١}}{-١} + \text{ث}$

$= \frac{-٢}{٣}\,\text{ع}^{-٣} - \text{ع}^{-٢} - \frac{٢}{١}\,\text{ع}^{-١} + \text{ث}$

$= \frac{-٢}{٣}\left(\sqrt{\text{س}}-١\right)^{-٣} - \left(\sqrt{\text{س}}-١\right)^{-٢}$

$- \frac{٢}{١}\left(\sqrt{\text{س}}-١\right)^{-١} + \text{ث}$

(٢١) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٢\,\text{س}-١}}\,\text{ءس}$ بوضع $\text{ع} = ٢\,\text{س} - ١$

∴ $\text{س} = \frac{١}{٢}\,\text{ع} + \frac{١}{٢}$ ∴ $\text{ءس} = \frac{١}{٢}\,\text{ءع}$

∴ $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٢\,\text{س}-١}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\left(\frac{١}{٢}\,\text{ع} + \frac{١}{٢}\right)^{٢}}{\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{١}{٢}\,\text{ءع}$

$= \int \frac{\frac{١}{٤}\,\text{ع}^{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{ع} + \frac{١}{٤}}{\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{١}{٢}\,\text{ءع}$

$= \int \left(\frac{١}{٨}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤}\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٨}\,\text{ع}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{ءع}$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{٥}\,\text{ع}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{١}\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٠}\,\text{ع}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤}\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٠}\,(٢\,\text{س}-١)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦}\,(٢\,\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٤}(٢\,\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

(٢٢) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٢-\text{س}^{٢}}}\,\text{ءس}$ بوضع $\text{ع} = ٢ - \text{س}^{٢}$

فإن $\text{س}^{٢} = ٢ - \text{ع}$ ∴ $٢\,\text{س}\,.\,\text{ءس} = -\text{ءع}$

$\therefore \int \frac{\text{س}^2\,\text{ء س}}{\sqrt{2-\text{س}^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{س}^2}{\sqrt{2-\text{س}^2}}\,2\text{س}\,.\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2-\text{ع}}{\sqrt{\text{ع}}}\,.\,(-\text{ء ع})$

$= \int -\text{ع}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{ع}^{\frac{1}{2}}\,\text{ء ع}$

$= \frac{-\text{ع}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\times\frac{\text{ع}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$= -2\,(2-\text{س}^2)^{\frac{1}{2}}$

$+ \frac{1}{3}\,(2-\text{س}^2)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(٢٣) $\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\sqrt{\text{س}}+1}}$ بوضع $\text{ع} = \sqrt{\text{س}}+1$

$\therefore \text{س} = (\text{ع}-1)^2$

$\therefore \text{ء س} = 2\,(\text{ع}-1)^2\,.\,\text{ء ع}$

$\therefore \int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\sqrt{\text{س}}+1}} = \int \frac{2\,(\text{ع}-1)^2\,\text{ء ع}}{\sqrt{\text{ع}}}$

$= \int \frac{2\,(\text{ع}^2-2\text{ع}+1)}{\sqrt{\text{ع}}}\,\text{ء ع}$

$= \int (2\,\text{ع}^{\frac{3}{2}} - 6\,\text{ع}^{\frac{1}{2}}$

$+ 2\,\text{ع}^{-\frac{1}{2}})\,\text{ء ع}$

$= \frac{6}{5}\,\text{ع}^{\frac{5}{2}} - 4\,\text{ع}^{\frac{3}{2}}$

$+ 6\,\text{ع}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= \frac{6}{5}\,(\sqrt{\text{س}}+1)^{\frac{5}{2}}$

$- 4\,(\sqrt{\text{س}}+1)^{\frac{3}{2}}$

$+ 6\,(\sqrt{\text{س}}+1)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

(٢٤) $\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{\text{س}}}}$ بوضع $\text{ع} = 2-\sqrt{\text{س}}$

$\therefore \text{س} = (2-\text{ع})^2$

$\therefore \text{ء س} = -2\,(2-\text{ع})\,\text{ء ع}$

$\therefore \int \frac{\text{ء س}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{\text{س}}}}$

$= \int \frac{-2\,(2-\text{ع})\,\text{ء ع}}{\sqrt[3]{\text{ع}}}$

$= \int (-4\,\text{ع}^{\frac{2}{3}} + 2\,\text{ع}^{\frac{5}{3}})\,\text{ء ع}$

$= -4\times\frac{3}{2}\,\text{ع}^{\frac{2}{3}} + 2\times\frac{3}{5}\,\text{ع}^{\frac{5}{3}} + \text{ث}$

$= -6\,\text{ع}^{\frac{2}{3}} + \frac{6}{5}\,\text{ع}^{\frac{5}{3}} + \text{ث}$

$= -6\,(2-\sqrt{\text{س}})^{\frac{2}{3}}$

$+ \frac{6}{5}\,(2-\sqrt{\text{س}})^{\frac{5}{3}} + \text{ث}$

(٢٥) $\int \frac{\text{س}^2\,\text{ء س}}{\sqrt{(\text{س}^2+3)^3}}$ بوضع $\text{ع} = \text{س}^2+3$

$\therefore \text{س}^2 = \text{ع}-3$ $\quad\therefore 2\text{س}\,\text{ء س} = \text{ء ع}$

$\therefore \int \frac{\text{س}^2\,\text{ء س}}{\sqrt{(\text{س}^2+3)^3}}$

$= \frac{1}{2}\int \text{س}^2\,(\text{س}^2+3)^{-\frac{3}{2}} \times 2\text{س}\,.\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\int (\text{ع}-3)\times\text{ع}^{-\frac{3}{2}}\,.\,\text{ء ع}$

$= \frac{1}{2}\int (\text{ع}^{-\frac{1}{2}} - 3\,\text{ع}^{-\frac{3}{2}})\,.\,\text{ء ع}$

$= \frac{1}{2}\,(2\,\text{ع}^{\frac{1}{2}} + 6\,\text{ع}^{-\frac{1}{2}}) + \text{ث}$

$= \text{ع}^{\frac{1}{2}} + 3\,\text{ع}^{-\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= (\text{س}^2+3)^{\frac{1}{2}} + 3\,(\text{س}^2+3)^{-\frac{1}{2}} + \text{ث}$

(٢٦) $\int \text{س}^{10}\left(\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}\right)^7 \text{ء س}$

$\int \text{س}\,.\,\text{س}^{11}\left(\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}\right)^7 \text{ء س}$

$\int \text{س}\,(\text{س}+1)^7\,\text{ء س}$

بوضع $\text{ع} = \text{س}+1$ $\quad\therefore \text{س} = \text{ع}-1$

$\therefore \text{ء س} = \text{ء ع}$

$\therefore \int \text{س}\,(\text{س}+1)^7\,\text{ء س}$

$\int (\text{ع}-1)\,(\text{ع})^7\,\text{ء س}$

$- \int (\text{ع}^8 - \text{ع}^7)\,\text{ء ع}$

$\frac{1}{9}\,\text{ع}^9 - \frac{1}{8}\,\text{ع}^8 + \text{ث}$

$\frac{1}{9}\,(\text{س}+1)^9 - \frac{1}{8}\,(\text{س}+1)^8 + \text{ث}$

(٢٧) $\int 9\,\text{س}^2\sqrt[3]{\frac{4}{\text{س}^2} - 2}\,\text{ء س}$

$= \int (-9\,\text{س}^2)\sqrt[3]{4 - 2\,\text{س}^2}\,\text{ء س}$

$\frac{(4 - 2\,\text{س}^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \text{ث}$

$\frac{3}{4}\,(4 - 2\,\text{س}^2)^{\frac{4}{3}} + \text{ث}$

(٢٨) $\int \frac{2\text{س} - 1}{(2\text{س}+3)^2}\,\text{ء س}$

بوضع $\text{ع} = 2\text{س}+3$

$\therefore 2\text{س} = \text{ع}-3$ $\quad\therefore \text{ء س} = \frac{1}{2}\,\text{ء ع}$

$\therefore \int \frac{2\text{س} - 1}{(2\text{س}+3)^2}\,\text{ء س}$

$= \int \frac{\text{ع} - 3 - 1}{\text{ع}^2}\times\frac{1}{2}\,\text{ء ع}$

$= \int (\frac{1}{2}\,\text{ع}^{-1} - 2\,\text{ع}^{-2})\,\text{ء ع}$

$= \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| - \frac{2\,\text{ع}^{-1}}{-1} + \text{ث}$

$= \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + 2\,\text{ع}^{-1} + \text{ث}$

$= \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{س}+3| + 2\,(2\text{س}+3)^{-1} + \text{ث}$

(٢٩) $\int \frac{(\text{س}+3)^2 - 27}{\text{س}}\,\text{ء س}$

بوضع $\text{ع} = \text{س}+3$ $\quad\therefore \text{س} = \text{ع}-3$

$\therefore \text{ء س} = \text{ء ع}$

$\therefore \int \frac{(\text{س}+3)^2 - 27}{\text{س}}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{ع}^2 - 27}{\text{ع}-3}\,\text{ء ع}$

$= \int (\text{ع}^2 + 3\,\text{ع} + 9)\,\text{ء ع}$

$= \frac{1}{3}\,\text{ع}^3 + \frac{3}{2}\,\text{ع}^2 + 9\,\text{ع} + \text{ث}$

$= \frac{1}{3}\,(\text{س}+3)^3 + \frac{3}{2}\,(\text{س}+3)^2$

$+ 9\,(\text{س}+3) + \text{ث}$

(٣٠) $\int \text{س}\,(\sqrt{\text{س}}+2)^3\,\text{ء س}$

بوضع $\text{ع} = \sqrt{\text{س}}+2$ $\quad\therefore \text{س} = (\text{ع}-2)^2$

$\therefore \text{ء س} = 2\,(\text{ع}-2)\,\text{ء ع}$

$\therefore \int \text{س}\,(\sqrt{\text{س}}+2)^3\,\text{ء س}$

$= \int (\text{ع}-2)^2\,.\,\text{ع}^3 \times 2\,(\text{ع}-2)\,\text{ء ع}$

$= \int 2\,\text{ع}^3\,(\text{ع}-2)(\text{ع}^2 - 4\,\text{ع} + 4)\,\text{ء ع}$

$= \int 2\,\text{ع}^3\,(\text{ع}^2 - 6\,\text{ع}^2 + 12\,\text{ع} - 8)\,\text{ء ع}$

$= \int (2\,\text{ع}^5 - 12\,\text{ع}^4 + 24\,\text{ع}^3 - 16\,\text{ع}^2)\,\text{ء ع}$

$= \frac{1}{3}\,\text{ع}^6 - \frac{6}{5}\,\text{ع}^5 + 6\,\text{ع}^4$

$- \frac{16}{3}\,\text{ع}^3 + \text{ث}$

$= \frac{1}{3}\,(\sqrt{\text{س}}+2)^6 - \frac{6}{5}\,(\sqrt{\text{س}}+2)^5$

$+ 6\,(\sqrt{\text{س}}+2)^4 - \frac{16}{3}\,(\sqrt{\text{س}}+2)^3 + \text{ث}$

(٣١) $\int \sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}}-3)^4\,\text{ء س}$

بوضع $\text{ع} = \sqrt{\text{س}}-3$ $\quad\therefore \text{س} = (\text{ع}+3)^2$

$\therefore \text{ء س} = 2\,(\text{ع}+3)\,\text{ء ع}$

$\therefore \int \sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}}-3)^4\,\text{ء س}$

$= \int (\text{ع}+3)(\text{ع}^4)(2)(\text{ع}+3)\,\text{ء ع}$

$= \int (2\,\text{ع}^6 + 12\,\text{ع} + 18)\,\text{ع}^4\,\text{ء ع}$

$= \int 2\,\text{ع}^7 + 12\,\text{ع}^6 + 18\,\text{ع}^4\,\text{ء ع}$

$= \frac{1}{4}\,\text{ع}^8 + 2\,\text{ع}^7 + \frac{18}{5}\,\text{ع}^5 + \text{ث}$

$= \frac{1}{4}\,(\sqrt{\text{س}}-3)^8 + 2\,(\sqrt{\text{س}}-3)^7$

$+ \frac{18}{5}\,(\sqrt{\text{س}}-3)^5 + \text{ث}$

(٣٢) $\int \sqrt{\text{س}^2 + \text{س}}\,\text{ء س}$

$= \int \sqrt{\text{س}}\,\sqrt{\text{س}^2 + 1}\,\text{ء س}$

بوضع $\text{ع} = \sqrt{\text{س}}+1$ $\quad\therefore \text{س} = (\text{ع}-1)^2$

$\therefore \text{ء س} = 2\,(\text{ع}-1)\,\text{ء ع}$

∴ ∫ √س √(س^½ + ١) ءس

= ∫ (ع − ١) √(ع × ٢(ع − ١)) ءع

= ∫ ٢ (ع − ١)^٢ ع^½ ءع

= ∫ (٢ ع^٢ − ٤ ع + ٢) ع^½ ءع

= ∫ (٢ ع^½ − ٤ ع^½ + ٢ ع^½) ءع

= ١/٧ ع^½ − ٤/٥ ع^½ + ١/٣ ع^½ + ث

= ١/٧ (√س + ١)^½ − ٤/٥ (√س + ١)^½

+ ١/٣ (√س + ١)^½ + ث

---

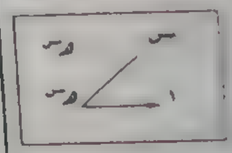
① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب)

⑤ (ب) ⑥ (د) ⑦ (د) ⑧ (ب)

⑨ (أ) ⑩ (جـ) ⑪ (د) ⑫ (ب)

---

①

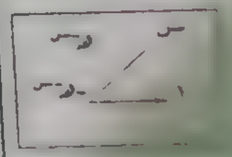


∫ س هـ^س ءس

= س هـ^س − ∫ هـ^س ءس

= س هـ^س − هـ^س + ث

②



∫ س هـ^−س ءس

= − س هـ^−س

− ∫ − هـ^−س ءس

= − س هـ^−س − (− هـ^−س)/(−١) + ث

= − س هـ^−س − هـ^−س + ث

③ ∫ ٤ س هـ^٢س ءس

= ٢ س هـ^٢س

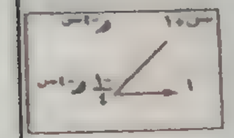
− ∫ ٢ هـ^٢س ءس

= ٢ س هـ^٢س − ٢ هـ^٢س + ث

= ٢ س هـ^٢س − هـ^٢س + ث

---

④ ∫ (س + ١) هـ^−٤س ءس



= ١/٤ (س + ١) هـ^−٤س

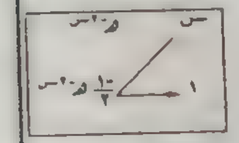
− ∫ ١/٤ هـ^−٤س ءس

= ١/٤ (س + ١) هـ^−٤س

− (١/٤) × (١/٤ هـ^−٤س) + ث

= ١/٤ (س + ١) هـ^−٤س − ١/١٦ هـ^−٤س + ث

⑤ ∫ س/هـ^٢س ءس



= ∫ س . هـ^−٢س ءس

= −١/٢ س هـ^−٢س − ∫ −١/٢ هـ^−٢س ءس

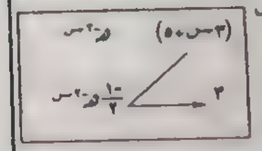
= −١/٢ س هـ^−٢س + ١/٢ (١/٢ هـ^−٢س) + ث

= −١/٢ س هـ^−٢س − ١/٤ هـ^−٢س + ث

⑥ ∫ (٣ س + ٥)/هـ^٢س ءس

= ∫ (٣ س + ٥) هـ^−٢س ءس

= −١/٢ (٣ س + ٥) هـ^−٢س



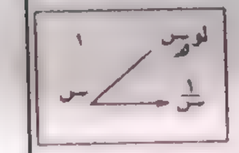
− (−٣/٢) ∫ هـ^−٢س ءس

= −١/٢ (٣ س + ٥) هـ^−٢س

+ ٣/٢ × ١/٢ هـ^−٢س + ث

= −١/٢ (٣ س + ٥) هـ^−٢س − ٣/٤ هـ^−٢س + ث

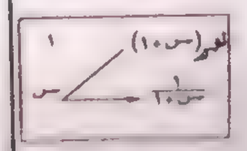
⑦ ∫ لو_هـ س ءس



= س لو_هـ س − ∫ ءس

= س لو_هـ س − س + ث

⑧ ∫ لو_هـ (س + ١) ءس



= س لو_هـ (س + ١)

− ∫ س/(س + ١) ءس

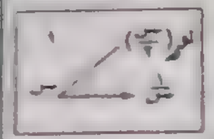
= س لو_هـ (س + ١) − ∫ (س + ١)/(س + ١) − ١/(س + ١) ءس

= س لو_هـ (س + ١) − ∫ (١ − ١/(س + ١)) ءس

= س لو_هـ (س + ١) − (س − لو_هـ |س + ١|) + ث

= س لو_هـ (س + ١) − س + لو_هـ |س + ١| + ث

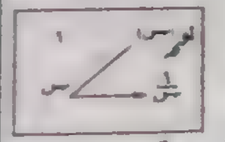
⑨ ∫ لو_هـ (س/٢) ءس



= س لو_هـ (س/٢) − ∫ ءس

= س لو_هـ س/٢ − س + ث

⑩ ∫ لو_هـ س^٢ ءس



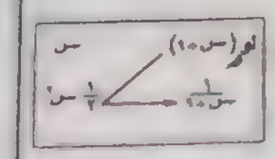
= ٢ ∫ لو_هـ |س| ءس

= ٢ [س لو_هـ |س| − ∫ ءس]

= ٢ س لو_هـ |س| − ٢ س + ث

⑪ ∫ س لو_هـ (س + ١)

= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١)



− ١/٢ ∫ س^٢/(س + ١) ءس

بوضع ع = س + ١ ∴ ءع = ءس

، س = ع − ١

= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) − ١/٢ ∫ (ع − ١)^٢/ع ءع

= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) − ١/٢ ∫ (ع^٢ − ٢ ع + ١)/ع ءع

= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) − ١/٢ ∫ (ع − ٢ + ١/ع) ءع

= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١)

− ١/٢ (١/٢ ع^٢ − ٢ ع + لو_هـ |ع|) + ث

= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) − ١/٤ ع^٢

+ ع − ١/٢ لو_هـ |ع| + ث

= ١/٢ س^٢ لو_هـ (س + ١) − ١/٤ (س + ١)^٢

+ (س + ١) − ١/٢ لو_هـ |س + ١| + ث

---

⑫ ∫ س^٢ لو_هـ س ءس

= ١/٣ س^٣ لو_هـ س

− ∫ ١/٣ س^٣ ءس

= ١/٣ س^٣ لو_هـ س − ١/٣ × ١/٣ س^٣ + ث

= ١/٣ س^٣ لو_هـ س − ١/٩ س^٣ + ث

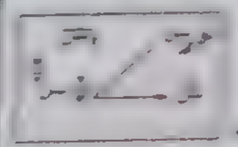
⑬ ∫ ١/(س لو_هـ س) ءس = ∫ (١/س) (١/لو_هـ س) ءس

= لو_هـ لو_هـ |س| + ث

⑭ ∫ ١/(س (لو_هـ س)^٢) ءس = ∫ (١/س) (لو_هـ س)^−٢ ءس

= −١/٣ (لو_هـ س)^−٣ + ث

⑮ ∫ √س لو_هـ س ءس



= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س

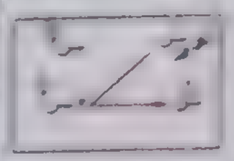
− ∫ ٢/٣ س^٣/٢ × ١/س ءس

= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س − ٢/٣ ∫ س^١/٢ ءس

= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س − ٢/٣ × ٢/٣ س^٣/٢ + ث

= ٢/٣ س^٣/٢ لو_هـ س − ٤/٩ س^٣/٢ + ث

⑯ ∫ لو_هـ س/√س ءس



= ٢ √س لو_هـ س

− ∫ ٢ √س ١/س ءس

= ٢ √س لو_هـ س − ٢ × ٢ √س + ث

= ٢ √س لو_هـ س − ٤ √س + ث

⑰ ∫ لو_هـ |س| ءس = س لو_هـ |س| − ∫ س/س ءس

= س لو_هـ |س| − س + ث

⑱ ∫ (لو_هـ |س|)^٢ ءس = ∫ س/س (لو_هـ |س|)^٢ ءس

= س (لو_هـ |س|)^٢ − ٢ ∫ لو_هـ |س| ءس

⑲ $\int \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \frac{\text{ء س}}{\text{س}^2}$

$= -\text{س}^{-1} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$+ \int \frac{1}{\text{س}^2} \, \text{ء س} = \frac{-1}{\text{س}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{س}^{-1} + \text{ث}$

$= \frac{-1}{\text{س}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{1}{\text{س}} + \text{ث}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$	س^2
$\frac{1}{\text{س}}$	$-\text{س}^{-1}$

⑳ $\int \text{س}^2 \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^2 \, \text{ء س}$

$= 2 \int \text{س}^2 \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{ء س}$

$= \frac{2}{3} \text{س}^3 \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{2}{3} \int \text{س}^2 \, \text{ء س}$

$= \frac{2}{3} \text{س}^3 \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \text{س}^3 + \text{ث}$

$= \frac{2}{3} \text{س}^3 \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{2}{9} \text{س}^3 + \text{ث}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$	س^2
$\frac{1}{\text{س}}$	$\frac{1}{3}\text{س}^3$

٥

① $\int 2 \text{س} \, \text{هـ}^{3\text{س}^2+1} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{3} \int 6 \text{س} \, \text{هـ}^{3\text{س}^2+1} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{3} \text{هـ}^{3\text{س}^2+1} + \text{ث}$

② $\int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^3} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{3} \int 3\text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^3} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{3} \text{هـ}^{\text{س}^3} + \text{ث}$

③ $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}} + 3} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int (2\text{هـ}^{2\text{س}}) \times \frac{1}{\text{هـ}^{2\text{س}} + 3} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{2\text{س}} + 3| + \text{ث}$

$= \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{هـ}^{2\text{س}} + 3) + \text{ث}$

④ $\int \frac{4\text{هـ}^{3\text{س}}}{1 - \text{هـ}^{3\text{س}}} \, \text{ء س}$

$= \frac{-4}{3} \int -3\text{هـ}^{3\text{س}} \times \frac{1}{1 - \text{هـ}^{3\text{س}}} \, \text{ء س}$

$= \frac{-4}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |1 - \text{هـ}^{3\text{س}}| + \text{ث}$

⑤ $\int (3 - \text{س}) \, \text{هـ}^{6\text{س} - \text{س}^2} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int (6 - 2\text{س}) \, \text{هـ}^{6\text{س} - \text{س}^2} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{هـ}^{6\text{س} - \text{س}^2} + \text{ث}$

⑥ $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}+1}}}{\sqrt{\text{س}+1}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}} \, \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}+1}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}+1}} + \text{ث}$

⑦ $\int \frac{\text{هـ}^{-\text{س}} - 1}{\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{س}} \, \text{ء س}$

$= -\int (-\text{هـ}^{-\text{س}} + 1) \times \frac{1}{\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{س}} \, \text{ء س}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{س}| + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س}}{\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س}^2} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int (2\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\text{س}) \left(\frac{1}{\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س}^2}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س}^2| + \text{ث}$

⑨ $\int \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^3 - \text{س}} \, \text{ء س}$

(بأخذ س^2 عامل مشترك من البسط والمقام)

$= \int \frac{\cancel{\text{س}^2} \left(1 + \frac{1}{\text{س}^2}\right)}{\cancel{\text{س}^2} \left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)} \, \text{ء س}$

$= \int \frac{1 + \frac{1}{\text{س}^2}}{\text{س} - \frac{1}{\text{س}}} \, \text{ء س}$

(لاحظ أن البسط هو تفاضل للمقام)

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - \frac{1}{\text{س}}| + \text{ث}$

٦

① $\therefore \int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{ء س}$

$= \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}}$

$+ 2\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س^2	$\text{هـ}^{\text{س}}$
2س	$\text{هـ}^{\text{س}}$
2	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر	$\text{هـ}^{\text{س}}$

② $\therefore \int 9\text{س}^2 \, \text{هـ}^{3\text{س}} \, \text{ء س}$

$= 3\text{س}^2 \, \text{هـ}^{3\text{س}}$

$- 2\text{س} \, \text{هـ}^{3\text{س}}$

$+ \frac{2}{3} \text{هـ}^{3\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
9س^2	$\text{هـ}^{3\text{س}}$
18س	$\frac{1}{3}\text{هـ}^{3\text{س}}$
18	$\frac{1}{9}\text{هـ}^{3\text{س}}$
صفر	$\frac{1}{27}\text{هـ}^{3\text{س}}$

③ $\therefore \int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{-3\text{س}} \, \text{ء س}$

$= \frac{-1}{3} \text{س}^2 \, \text{هـ}^{-3\text{س}}$

$- \frac{2}{9} \text{س} \, \text{هـ}^{-3\text{س}}$

$- \frac{2}{27} \text{هـ}^{-3\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س^2	$\text{هـ}^{-3\text{س}}$
2س	$\frac{-1}{3}\text{هـ}^{-3\text{س}}$
2	$\frac{1}{9}\text{هـ}^{-3\text{س}}$
صفر	$\frac{-1}{27}\text{هـ}^{-3\text{س}}$

④ $\int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^2} \, \text{ء س}$

$= \int \text{س}^2 . \text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}^2} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^2}$

$- \frac{1}{2} \int 2\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}^2} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^2} - \frac{1}{2} \text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{ث}$

س^2	$\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}^2}$
2س	$\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}^2}$

⑤ $\therefore \int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}+2} \, \text{ء س}$

$= \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}+2}$

$- 2\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}+2}$

$+ 2\text{هـ}^{\text{س}+2} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س^2	$\text{هـ}^{\text{س}+2}$
2س	$\text{هـ}^{\text{س}+2}$
2	$\text{هـ}^{\text{س}+2}$
صفر	$\text{هـ}^{\text{س}+2}$

⑥ $\therefore \int (\text{س} + 1)^2 \, \text{هـ}^{2\text{س}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} (\text{س} + 1)^2 \, \text{هـ}^{2\text{س}}$

$- \frac{1}{2} (\text{س} + 1) \, \text{هـ}^{2\text{س}}$

$+ \frac{1}{4} \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
$(\text{س}+1)^2$	$\text{هـ}^{2\text{س}}$
$2(\text{س}+1)$	$\frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}}$
2	$\frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}}$
صفر	$\frac{1}{8}\text{هـ}^{2\text{س}}$

⑦ $\therefore \int (\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}})^2 \, \text{ء س}$

$= \int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{2\text{س}} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{س}^2 \, \text{هـ}^{2\text{س}}$

$- \frac{1}{2} \text{س} \, \text{هـ}^{2\text{س}}$

$+ \frac{1}{4} \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{ث}$

تفاضل	تكامل
س^2	$\text{هـ}^{2\text{س}}$
2س	$\frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}}$
2	$\frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}}$
صفر	$\frac{1}{8}\text{هـ}^{2\text{س}}$

⑧

$\text{س} \, \text{هـ}^{2\text{س}}$	$(2\text{س}+1)^{-2}$
$\text{هـ}^{2\text{س}}(2\text{س}+1)$	$\frac{(2\text{س}+1)^{-1}}{-2}$

$\therefore \int \frac{\text{س} \, \text{هـ}^{2\text{س}}}{(2\text{س} + 1)^2} \, \text{ء س} = \frac{-\text{س}}{2} (2\text{س} + 1)^{-1} \, \text{هـ}^{2\text{س}}$

$- \frac{1}{2} \int \text{هـ}^{2\text{س}} (2\text{س} + 1) \times (2\text{س} + 1)^{-1} \, \text{ء س}$

$= -\frac{\text{س}}{2} (2\text{س} + 1)^{-1} \, \text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{1}{2} \int \text{هـ}^{2\text{س}} \, \text{ء س}$

$= -\frac{\text{س}}{2} (2\text{س} + 1)^{-1} \, \text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{1}{4} \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{ث}$

⑨

$\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}}$	$(\text{س}+1)^{-2}$
$\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{هـ}^{\text{س}}$ $= \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+1)$	$-(\text{س}+1)^{-1}$

$\therefore \int \frac{\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + 1)^2} \, \text{ء س}$

$= -\text{س} (\text{س} + 1)^{-1} \, \text{هـ}^{\text{س}} + \int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{ء س}$

$= -\text{س} (\text{س} + 1)^{-1} \, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{\text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^2}}{(\text{س}^2 + 1)^2} \, \text{ء س}$

بوضع $\text{س}^2 = \text{ع}$

$\therefore 2\text{س} \, \text{ء س} = \text{ء ع}$

$\text{ع} \, \text{هـ}^{\text{ع}}$	$(\text{ع}+1)^{-2}$
$\text{ع} \, \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{هـ}^{\text{ع}}$ $= \text{هـ}^{\text{ع}}(\text{ع}+1)$	$-(\text{ع}+1)^{-1}$

$\therefore \int \frac{\text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^2}}{(\text{س}^2 + 1)^2} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{\text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^2}}{(\text{س}^2 + 1)^2} \times 2\text{س} \, \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{ع\, هـ^{ع}}{(ع+1)^2}\, ءع$

$= \frac{1}{2} \left[-ع\, هـ^{ع} (ع+1)^{-1} + \int هـ^{ع}\, ءع \right]$

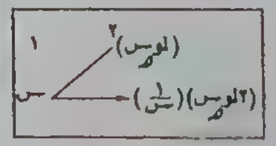
$= -\frac{1}{2} ع\, هـ^{ع} (ع+1)^{-1} + \frac{1}{2} هـ^{ع} + ث$

$= -\frac{1}{2} \left(\frac{س^2\, هـ^{س^2}}{س^2+1} \right) + \frac{1}{2} هـ^{س^2} + ث$

(١١) $\int \frac{هـ^{\frac{1}{س}}}{س^2}\, ءس = -\int \frac{-1}{س^2} هـ^{\frac{1}{س}}\, ءس$

$= -هـ^{\frac{1}{س}} + ث$

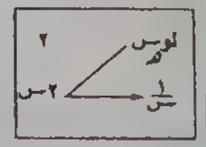
(١٢) $\int (لو_{هـ} س)^2\, ءس$



$= س (لو_{هـ} س)^2$

$- \int ٢ لو_{هـ} س\, ءس$

$= س (لو_{هـ} س)^2$

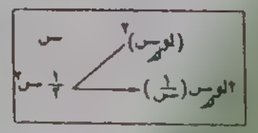


$- \left[٢س لو_{هـ} س - \int ٢ءس \right]$

$= س (لو_{هـ} س)^2 - ٢ س لو_{هـ} س$

$+ ٢ س + ث$

(١٣) $\int س (لو_{هـ} س)^2\, ءس$

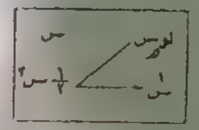


$= \frac{1}{2} س^2 (لو_{هـ} س)^2$

$- \int س لو_{هـ} س\, ءس$

$= \frac{1}{2} س^2 (لو_{هـ} س)^2$

$- \left[\frac{1}{2} س^2 لو_{هـ} س \right.$



$- \int \left. \frac{1}{2} س\, ءس \right]$

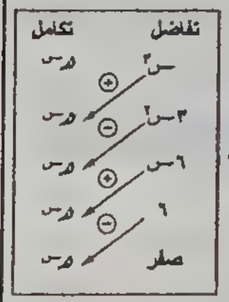
$= \frac{1}{2} س^2 (لو_{هـ} س)^2$

$- \frac{1}{2} س^2 لو_{هـ} س + \frac{1}{4} س^2 + ث$

(١٤) $\int س^2 هـ^{س}\, ءس$

$= س^2 هـ^{س} - ٢ س^2 هـ^{س}$

$+ ٦ س هـ^{س} - ٦ هـ^{س} + ث$



٧

(١) $\int س \sqrt{٤ - س}\, ءس$ بوضع $ع = ٤ - س$

$\therefore س = ٤ - ع$

$\therefore ءس = -ءع$

$\therefore \int س \sqrt{٤ - س}\, ءس$

$= \int (٤ - ع) \times \sqrt{ع} \times -ءع$

$= \int \left(-٤ ع^{\frac{1}{2}} + ع^{\frac{3}{2}} \right) ءع$

$= \frac{-8}{3} ع^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} ع^{\frac{5}{2}} + ث = \frac{-8}{3} (٤ - س)^{\frac{3}{2}}$

$+ \frac{2}{5} (٤ - س)^{\frac{5}{2}} + ث$

حل آخر : $\int س \sqrt{٤ - س}\, ءس$

$= - \int -س (٤ - س)^{\frac{1}{2}}\, ءس$

$= - \int (٤ - س - ٤) (٤ - س)^{\frac{1}{2}}\, ءس$

$= - \int (٤ - س)^{\frac{3}{2}} - ٤ (٤ - س)^{\frac{1}{2}}\, ءس$

$= - \left(\frac{-2}{5} (٤ - س)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} (٤ - س)^{\frac{3}{2}} \right) + ث$

$= \frac{2}{5} (٤ - س)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3} (٤ - س)^{\frac{3}{2}} + ث$

(٢) $\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥ س}}\, ءس$

بوضع $٤ + ٥ س = ع$

$\therefore س = \frac{1}{5} ع - \frac{4}{5}$

$\therefore ءس = \frac{1}{5} ءع$

$\therefore \int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥ س}}\, ءس = \int \frac{\frac{1}{5} ع - \frac{4}{5}}{\sqrt{ع}} \times \frac{1}{5}\, ءع$

$= \int \left(\frac{1}{25} ع^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{25} ع^{-\frac{1}{2}} \right) ءع$

$= \frac{2}{75} ع^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{25} ع^{\frac{1}{2}} + ث$

$= \frac{2}{75} (٤ + ٥ س)^{\frac{3}{2}}$

$- \frac{8}{25} (٤ + ٥ س)^{\frac{1}{2}} + ث$

حل آخر :

$\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥ س}}\, ءس = \frac{1}{5} \int ٥ س (٤ + ٥ س)^{-\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \frac{1}{5} \int (٥ س + ٤ - ٤)$

$(٥ س + ٤)^{-\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \frac{1}{5} \int \left[(٥ س + ٤)^{\frac{1}{2}} \right.$

$\left. - ٤ (٥ س + ٤)^{-\frac{1}{2}} \right] ءس$

$= \frac{1}{5} \left[\frac{(٥ س + ٤)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times ٥} \right.$

$\left. - \frac{٤ (٥ س + ٤)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times ٥} \right] + ث$

$= \frac{2}{75} (٥ س + ٤)^{\frac{3}{2}}$

$- \frac{8}{25} (٥ س + ٤)^{\frac{1}{2}} + ث$

(٣) $\int \frac{٤ س}{\sqrt{٢ س + ١}}\, ءس$

بوضع $٢ س + ١ = ع$ $\therefore س = \frac{1}{2} ع - \frac{1}{2}$

$\therefore ءس = \frac{1}{2} ءع$

$\therefore \int \frac{٤ س}{\sqrt{٢ س + ١}}\, ءس = \int \frac{٢ ع - ٢}{\sqrt{ع}} \times \frac{1}{2}\, ءع$

$= \int (ع - ١) \times ع^{-\frac{1}{2}}\, ءع$

$= \int \left(ع^{\frac{3}{2}} - ع^{-\frac{1}{2}} \right) ءع$

$= \frac{2}{5} ع^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} ع^{\frac{3}{2}} + ث$

$= \frac{2}{5} (٢ س + ١)^{\frac{5}{2}}$

$- \frac{2}{3} (٢ س + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

حل آخر :

$\int \frac{٤ س}{\sqrt{٢ س + ١}}\, ءس$

$= ٢ \int ٢ س (٢ س + ١)^{-\frac{1}{2}}\, ءس$

$= ٢ \int (٢ س + ١ - ١) (٢ س + ١)^{-\frac{1}{2}}\, ءس$

$= ٢ \int \left((٢ س + ١)^{\frac{3}{2}} - (٢ س + ١)^{-\frac{1}{2}} \right) ءس$

$= \frac{2}{5} (٢ س + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (٢ س + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

ثانيًا مسائل على تطبيقات التكامل

١

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (د)

(٦) (أ) (٧) (د) (٨) (ب) (٩) (ب)

٢

ميل العمودي $= ٣ - س$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{-1}{٣ - س} = \frac{1}{س - ٣}$

بالتكامل $\therefore ص = \int \frac{1}{س - ٣}\, ءس = لو_{هـ} |س - ٣| + ث$

، $\because (٢ ، ٣) \in$ المنحنى $\therefore ٣ = لو_{هـ} |٢ - ٣| + ث$

$\therefore ث = ٣$

$\therefore$ معادلة المنحنى : $ص = لو_{هـ} |س - ٣| + ٣$

٣

ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = س \sqrt{س + ١}$

$\therefore ص = \int س \sqrt{س + ١}\, ءس$

$= \int (س + ١ - ١) (س + ١)^{\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \int \left((س + ١)^{\frac{3}{2}} - (س + ١)^{\frac{1}{2}} \right) ءس$

$= \frac{2}{5} (س + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (س + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

$\therefore \left(٠ ، \frac{11}{15} \right)$ على المنحنى

$\therefore \frac{11}{15} = \frac{2}{5} (٠ + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (٠ + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

$\therefore ث = ١$

$\therefore$ معادلة المنحنى

$ص = \frac{2}{5} (س + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (س + ١)^{\frac{3}{2}} + ١$

٤

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = س $\sqrt{س^٢ + ١}$

∴ ص = $\int$ س $\sqrt{س^٢ + ١}$ ءس

= $\frac{١}{٢}\int$ (٢ س) $\sqrt{س^٢ + ١}$ ءس

= $\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}$ $(س^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

= $\frac{١}{٣}$ $(س^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

، ∵ النقطة (٠ ، ١) ∈ للمنحنى

∴ ١ = $\frac{١}{٣}$ $(٠ + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ + ث ∴ ث = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المنحنى ص = $\frac{١}{٣}$ $(س^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{٢}{٣}$

٥

∵ ميل العمودى = $\frac{\sqrt{س}}{س - ١}$

∴ ميل المماس = $\frac{-(س - ١)}{\sqrt{س}}$ = $-\sqrt{س}$ + $\frac{١}{\sqrt{س}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $-س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}$

∴ ص = $\int$ $(-س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}})$ ءس

= $\frac{-٢}{٣}$ $س^{\frac{٣}{٢}}$ + ٢ $س^{\frac{١}{٢}}$ + ث

، ∵ (٩ ، -١٢) على المنحنى

∴ -١٢ = $\frac{-٢}{٣}$ $(٩)^{\frac{٣}{٢}}$ + ٢ $(٩)^{\frac{١}{٢}}$ + ث

∴ ث = ٠

∴ معادلة المنحنى هى ص = $\frac{-٢}{٣}$ $س^{\frac{٣}{٢}}$ + ٢ $س^{\frac{١}{٢}}$

أى أن ص = $\frac{-٢}{٣}$ س $\sqrt{س}$ + ٢ $\sqrt{س}$

٦

∵ ميل العمودى = $\frac{-٢ص}{س}$ ∴ ميل المماس = $\frac{س}{٢ص}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س}{٢ص}$ ∴ ٢ ص ءص = س ءس

∴ $\int$ ٢ ص ءص = $\int$ س ءس

∴ $ص^٢$ = $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + ث ، (١ ، ٣) على المنحنى

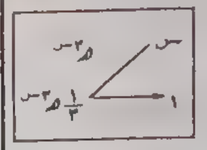
∴ ٩ = $\frac{١}{٢}$ $(٠)^٢$ + ث ∴ ث = ١

∴ المعادلة : $ص^٢$ = $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + ٩

∴ ٢ $ص^٢$ = $س^٢$ + ١٨

٧

∵ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$



= س $هـ^{٣س}$

∴ ص = $\int$ س $هـ^{٣س}$ ءس

= $\frac{١}{٣}$ س $هـ^{٣س}$ − $\int$ $\frac{١}{٣}$ $هـ^{٣س}$ ءس

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س $هـ^{٣س}$ − $\frac{١}{٩}$ $هـ^{٣س}$ + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{١}{٣}$ ، ٥)

∴ ٥ = $\frac{١}{٣}$ $(\frac{١}{٣})$ هـ − $\frac{١}{٩}$ هـ + ث ∴ ث = ٥

∴ المعادلة هى ص = $\frac{١}{٣}$ س $هـ^{٣س}$ − $\frac{١}{٩}$ $هـ^{٣س}$ + ٥

٨

∵ ميل العمودى = − $(لو_هـ س)^{-٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{(لو_هـ س)^{-٢}}$ = $(لو_هـ س)^٢$

∴ ص = $\int$ $(لو_هـ س)^٢$ ءس

، بوضع $لو_هـ$ س = ع

∴ س = $هـ^ع$

∴ ءس = $هـ^ع$. ءع

∴ ص = $\int$ $ع^٢$. $هـ^ع$ ءع

∴ ص = $ع^٢ \times هـ^ع$ − ٢ ع $هـ^ع$ + ٢ $هـ^ع$ + ث

= س $(لو_هـ س)^٢$ − ٢ س $لو_هـ$ س + ٢ س + ث

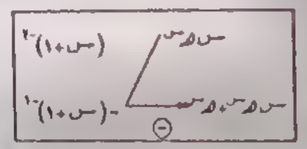
، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، هـ)

∴ هـ = هـ − ٢ هـ + ٢ هـ + ث ث = ٠

∴ ص = س $(لو_هـ س)^٢$ − ٢ س $لو_هـ$ س + ٢ س

٩

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$



= $\frac{س هـ^س}{(س + ١)^٢}$

∴ ص = $\int$ $\frac{س هـ^س}{(س + ١)^٢}$ ءس

∴ ص = $\frac{-س هـ^س}{س + ١}$ − $\int$ $\frac{(س + ١) هـ^س}{-(س + ١)}$ ءس

= $\frac{-س هـ^س}{س + ١}$ + $هـ^س$ + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ)

∴ ٢ هـ = $\frac{-١ هـ}{٢}$ + هـ + ث ∴ ث = $\frac{٣}{٢}$ هـ

∴ المعادلة هى : ص = $\frac{-س هـ^س}{س + ١}$ + $هـ^س$ + $\frac{٣}{٢}$ هـ

١٠

$\frac{ءع}{ءن}$ = ٠,٤ ن − ٤٠

∴ ع = ٠,٢ $ن^٢$ − ٤٠ ن + ث

، ∵ ع = ٩٨٠ عندما ن = ٣٠

∴ ٩٨٠ = ٠,٢ × $(٣٠)^٢$ − ٤٠ (٣٠) + ث

∴ ث = ٢٠٠٠

∴ ع = ٠,٢ $ن^٢$ − ٤٠ ن + ٢٠٠٠

، عندما ن = ٠ نحصل على سعة الإناء = ٢٠٠٠ سم^٣

، يصبح الإناء فارغًا عندما يكون حجم السائل = صفر

∴ ٠,٢ $ن^٢$ − ٤٠ ن + ٢٠٠٠ = ٠

∴ $ن^٢$ − ٢٠٠ ن + ١٠٠٠٠ = ٠

∴ $(ن - ١٠٠)^٢$ = ٠ ∴ ن = ١٠٠ ثانية

١١

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س}{ص}$ ∴ ص ءص = س ءس

∴ $\int$ ص ءص = $\int$ س ءس

∴ $\frac{ص^٢}{٢}$ = $\frac{س^٢}{٢}$ + ث ∴ $ص^٢$ = $س^٢$ + ث

، ∵ (١ ، ٢) تقع على المنحنى

∴ ٤ = ١ + ث ∴ ث = ٣

∴ معادلة المنحنى : $ص^٢$ = $س^٢$ + ٣

١٢

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = س $هـ^{-ص}$ ∴ س ءس = $هـ^{-ص}$ ءص

∴ $\int$ س ءس = $\int$ $هـ^{-ص}$ ءص

∴ $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ = − $هـ^{-ص}$ + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

∴ $\frac{١}{٢}$ = −١ + ث ∴ ث = $١\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المنحنى هى : $هـ^{-ص}$ + $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ = $١\frac{١}{٢}$

١٣

∵ د′(س) = ٣ $س^٢$ − ٦ س − ٩ (١)

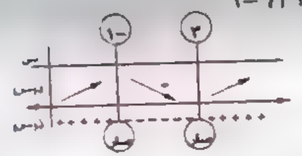
وبوضع د′(س) = صفر

∴ ٣ $س^٢$ − ٦ س − ٩ = صفر

∴ $س^٢$ − ٢ س − ٣ = صفر

∴ (س − ٣) (س + ١) = صفر

∴ س = ٣ أو −١



∴ هناك قيمة عظمى محلية للدالة عند س = −١

وهى ١٧

، هناك قيمة صغرى محلية للدالة عند س = ٣

ومن تكامل المعادلة (١)

∴ د (س) = $س^٣$ − ٣ $س^٢$ − ٩ س + ث

، ∵ د (−١) = ١٧

∴ $(-١)^٣$ − ٣ $(-١)^٢$ − ٩ (−١) + ث = ١٧

∴ ث = ١٢

∴ د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٩ س + ١٢

∴ القيمة الصغرى المحلية للدالة هى :

د (٣) = ٣^{٣} − ٣ (٣)^{٢} − ٩ (٣) + ١٢ = −١٥

١٤

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = أ س + ب

، ∵ للمنحنى نقطة انقلاب عند س = ٠

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠ ∴ ٠ = ٠ + ب ∴ ب = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ أ س ءس = $\frac{أ}{٢}$ س^{٢} + حـ (حـ ثابت)

، ∵ لها قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٠)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ عند س = ١

∴ ٠ = $\frac{أ}{٢}$ + حـ منها أ = −٢ حـ (١)

∴ ص = ∫ ($\frac{أ}{٢}$ س^{٢} + حـ) ءس

= $\frac{أ}{٦}$ س^{٣} + حـ س + ء

، ∵ المنحنى يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (١ ، ٠)

∴ ٢ = $\frac{أ}{٦}$ (٠) + حـ (٠) + ء ∴ ء = ٢

، ٠ = $\frac{أ}{٦}$ (١) + حـ (١) + ٢

∴ أ + ٦ حـ = −١٢ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ −٢ حـ + ٦ حـ = −١٢ ∴ ٤ حـ = −١٢

∴ حـ = −٣ ∴ أ = ٦

∴ معادلة المنحنى ص = س^{٣} − ٣ س + ٢

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} − ٣

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ± ١

، ∵ عند س = ١ توجد قيمة صغرى

، ∵ ($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$)$_{س = -١}$ < ٠

∴ عندها قيمة عظمى محلية

∴ القيمة العظمى المحلية هى (ص)$_{س = -١}$ = ٤

١٥

∵ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٦ س − ٢ (بالتكامل)

∴ ص$'$ = ٣ س^{٢} − ٢ س + ث

∴ ٢ = ٢٧ − ٦ + ث ∴ ث = −١٩

∴ ص$'$ = ٣ س^{٢} − ٢ س − ١٩

(بالتكامل مرة أخرى)

∴ ص = س^{٣} − س^{٢} − ١٩ س + ث$'$

∴ ١ = ٢٧ − ٩ − ٥٧ + ث$'$ ∴ ث$'$ = ٤٠

∴ معادلة المنحنى :

ص = س^{٣} − س^{٢} − ١٩ س + ٤٠

١٦

∵ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = $\frac{٢}{س^{٢}}$

وبإجراء التكامل للطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ ٢ س$^{-٢}$ ءس

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-١}{س^{٢}}$ + ث$_{١}$

، ∵ ميل المماس عند النقطة (٢ ، $\frac{٥}{٢}$) = $\frac{٣}{٤}$

∴ [$\frac{ءص}{ءس}$]$_{(٢ ، \frac{٥}{٢})}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{-١}{٤}$ + ث$_{١}$ ∴ ث$_{١}$ = ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-١}{س^{٢}}$ + ١ وبإجراء التكامل مرة أخرى

∴ ص = $\frac{١}{س}$ + س + ث$_{٢}$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، $\frac{٥}{٢}$) فهى تحقق معادلته

∴ $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ + ٢ + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{٢}$ = ٠

∴ معادلة المنحنى هى : ص = $\frac{١}{س}$ + س

١٧

$\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ (٦ − ٦ س) ءس

= ٦ س − ٣ س^{٢} + ث$_{١}$

، ∵ النقطة (٠ ، −٦) موقع نهاية صغرى محلية

∴ ($\frac{ءص}{ءس}$)$_{س = ٠}$ = ٠

∴ ث$_{١}$ = صفر ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س − ٣ س^{٢}

∴ ص = ∫ (٦ س − ٣ س^{٢}) ءس

= ٣ س^{٢} − س^{٣} + ث$_{٢}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، −٦)

∴ تحقق معادلته ∴ ث$_{٢}$ = −٦

∴ معادلة المنحنى هى : ص = ٣ س^{٢} − س^{٣} − ٦

١٨

∵ د$'$ (س) = ٦ س − ٤

∴ د$'$ (س) = ٣ س^{٢} − ٤ س + ث$_{١}$

، عندما س = ٣ فإن : د$'$ (س) = ٠

∴ ٣ × ٩ − ٤ × ٣ + ث$_{١}$ = ٠ ∴ ث$_{١}$ = −١٥

∴ د$'$ (س) = ٣ س^{٢} − ٤ س − ١٥

∴ د (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١٥ س + ث$_{٢}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٥)

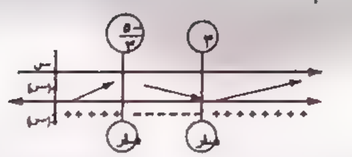
∴ −٥ = ١ − ٢ − ١٥ + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{٢}$ = ١١

∴ د (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١٥ س + ١١

، بوضع د$'$ (س) = ٠ ∴ ٣ س^{٢} − ٤ س − ١٥ = ٠

∴ (٣ س + ٥) (س − ٣) = ٠

∴ س = $\frac{-٥}{٣}$ أ، س = ٣



∴ الدالة لها قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{-٥}{٣}$

∴ د ($\frac{-٥}{٣}$) = $\frac{٦٩٧}{٢٧}$ وهى القيمة العظمى المحلية.

١٩

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} + ب س

∴ ص = ∫ (٦ س^{٢} + ب س) ءس

∴ ص = ٢ س^{٣} + $\frac{ب}{٢}$ س^{٢} + ث

، ∵ د (٠) = ٥ ∴ ٥ = ٠ + ٠ + ث

∴ ث = ٥

، ∵ د (٢) = −٣

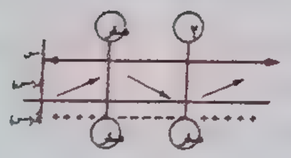
∴ −٣ = ١٦ + ٢ ب + ٥

∴ ب = −١٢

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} − ١٢ س

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢



، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢ س − ١٢

∴ ($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$)$_{س = ٠}$ = −١٢ (لها قيمة عظمى)

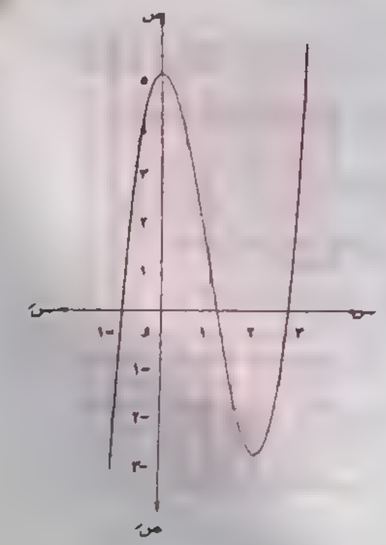
($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$)$_{س = ٢}$ = ١٢ (لها قيمة صغرى)

، بوضع $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٠ ∴ س = ١

، ∵ ص = ٢ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥

نعين نقط مساعدة عند س = ٣ ، س = −١

س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	−٣	٥	١	−٣	٥



٢١

دَ (س) = ٣ (س^{٢} − ١) = ٣ س^{٢} − ٣

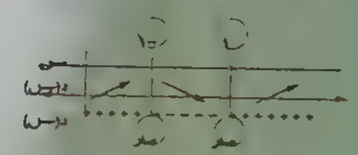
∴ ∫ دَ (س) ءس = ∫ ٣ (س^{٢} − ١) ءس

∴ د (س) = س^{٣} − ٣ س + ث يمر بالنقطة (−٢ ، −١)

∴ د (−٢) = −٨ + ٦ + ث = −١ ∴ ث = ١

∴ د (س) = س^{٣} − ٣ س + ١

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ± ١



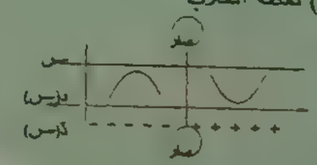
∴ د (−١) = ٣ قيمة عظمى محلية

، د (١) = −١ قيمة صغرى محلية

، دً (س) = ٦ س

، بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠

∴ (٠ ، ١) نقطة انقلاب

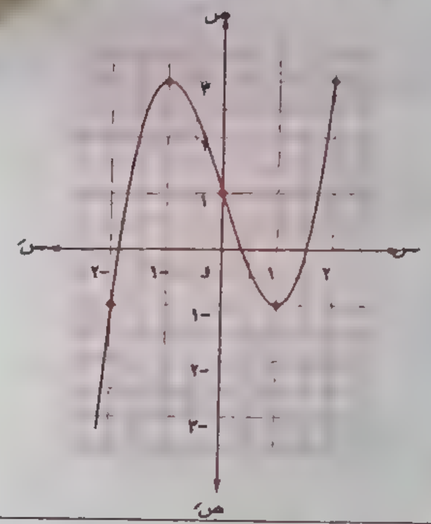


المنحنى يقطع محور الصادات عند س = ٠

∴ د (٠) = ١

* نعين نقط مساعدة . د (٢) = ٣ ، د (−٢)

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	−١	٣	١	−١	٣



٢٢

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٦ − ١٢ س

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ∫ (٦ − ١٢ س) ءس

= ٦ س − ٦ س^{٢} + ث$_{١}$

، ∵ توجد نقطة حرجة عند س = ١

∴ ٠ = ٦ − ٦ + ث$_{١}$ ∴ ث$_{١}$ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦ س − ٦ س^{٢} (١)

، بوضع $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ ∴ س = ٠ ، ١

عند س = ١ فإن $\left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right)$ < ٠ (توجد قيمة عظمى)

، عند س = ٠ فإن $\left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right)$ > ٠ (توجد قيمة صغرى)

∴ عند س = ٠ توجد قيمة صغرى قيمتها ٤

∴ (٠ ، ٤) تقع على المنحنى

١ ① (ب) ② (د) ③ (أ) ④ (د)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)

٢

① ∫ جا (٢ س − ٥) ءس

= − $\frac{١}{٢}$ جتا (٢ س − ٥) + ث

② ∫ $\sqrt{٣}$ جتا س ءس = $\sqrt{٣}$ جا س + ث

③ ∫ (٣ − س − جا ٤ س) ءس

= ٣ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ جتا ٤ س + ث

④ ∫ (جا س + جتا س) ءس

= − جتا س + جا س + ث

⑤ ∫ قا^{٢} (٥ − ٣ س) ءس

= $\frac{-١}{٣}$ ظا (٥ − ٣ س) + ث

⑥ ∫ قتا^{٢} (٢ س + ٣) ءس

= − $\frac{١}{٢}$ ظتا (٢ س + ٣) + ث

⑦ ∫ (جا ٣ س − قا^{٢} ٢ س) ءس

= $\frac{-١}{٣}$ جتا ٣ س − $\frac{١}{٢}$ ظا ٢ س + ث

⑧ ∫ قتا^{٢} $\left(\frac{س + ٣}{٢}\right)$ ءس = −٢ ظتا $\left(\frac{س + ٣}{٢}\right)$ + ث

⑨ ∫ قا ٢ س ظا ٢ س ءس = $\frac{١}{٢}$ قا ٢ س + ث

⑩ ∫ قتا ٥ س ظتا ٥ س ءس

= − $\frac{١}{٥}$ قتا ٥ س + ث

⑪ ∫ (٤ جتا ٢ س + $\frac{١}{جتا^{٢} س}$ + ١) ءس

= ∫ (٤ جتا ٢ س + قا^{٢} س + ١) ءس

= ٢ جا ٢ س + ظا س + س + ث

، ∵ ص = ∫ (٦ س − ٦ س^{٢}) ءس

= ٣ س^{٢} − ٢ س^{٣} + ث$_{٢}$

∴ ٤ = ٣ (٠) − ٢ (٠) + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{٢}$ = ٤

∴ ص = ٣ س^{٢} − ٢ س^{٣} + ٤

نعين قيم مساعدة عند س = −١ ، س = ٢

∴ ميل المماس عند س = −١

$\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = -١}$ = ٦ (−١) − ٦ (−١)^{٢} = −١٢

∴ ميل العمودى = $\frac{١}{١٢}$ ، عند س = −١

∴ ص = ٣ (−١)^{٢} − ٢ (−١)^{٣} + ٤ = ٩

∴ النقطة هى (−١ ، ٩)

∴ معادلة العمودى $\frac{ص - ٩}{س + ١}$ = $\frac{١}{١٢}$

∴ س − ١٢ ص + ١٠٩ = ٠

، بوضع $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ (انقلاب)

س	−١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
ص	٩	٤	$\frac{٩}{٢}$	٥	٠

(١) $\int$ (جا^2 س − جتا^2 س) ء س

= $\int$ جا ٢ س ء س

− $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س + ث

(٢) $\int$ جا ٣ س جتا ٣ س ء س

= $\int \frac{1}{2}$ جا ٦ س ء س

= $\frac{-1}{12}$ جتا ٦ س + ث

(٣) $\int$ (١ + ظا^2 س) جتا^2 س ء س

= $\int$ (قا^2 س × جتا^2 س) ء س

= $\int$ ء س = س + ث

(٤) $\int$ (١ + ظتا^2 س) جا^2 س ء س

$\int$ قتا^2 س × جا^2 س ء س = $\int$ ء س = س + ث

(٥) $\int$ ظا س جتا س ء س = $\int$ جا س ء س

= − جتا س + ث

(٦) $\int$ (جا س − جتا س)^2 ء س

= $\int$ (جا^2 س + جتا^2 س − ٢ جا س جتا س) ء س

= $\int$ (١ − جا ٢ س) ء س

= س + $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س + ث

(٧) $\int$ (١ + ظا^2 (٣ س − ١)) ء س

= $\int$ قتا^2 (٣ س − ١) ء س

= $\frac{-1}{3}$ ظتا (٣ س − ١) + ث

(٨) $\int$ (٣ + ظتا^2 س) ء س

= $\int$ (٢ + ١ + ظتا^2 س) ء س

= $\int$ (٢ + قتا^2 س) ء س

= ٢ س − ظتا س + ث

(٩) $\int \frac{4}{\text{جا}^2 5\text{س}}$ ء س = $\int$ ٤ قتا^2 ٥ س ء س

= $\frac{-4}{5}$ ظتا ٥ س + ث

(١٠) $\int \frac{5}{\text{جتا}^2 3\text{س}}$ ء س = $\int$ ٥ قا^2 ٣ س ء س

= $\frac{5}{3}$ ظا ٣ س + ث

(١١) $\int \frac{\text{ء س}}{\text{جتا ٢ س ظا ٢ س}}$ = $\int$ قا ٢ س ظا ٢ س ء س

= $\frac{1}{2}$ قا ٢ س + ث

(١٢) $\int \frac{\text{ظتا ٥ س}}{\text{جا ٥ س}}$ ء س = $\int$ قتا ٥ س . ظتا ٥ س ء س

= $\frac{-1}{5}$ قتا ٥ س + ث

(١٣) $\int$ [(١ − ظا س)^2 + ٢ ظا س] ء س

= $\int$ [١ − ٢ ظا س + ظا^2 س + ٢ ظا س] ء س

= $\int$ قا^2 س ء س = ظا س + ث

(١٢) $\int$ قا س (قا س − ظا س) ء س

= $\int$ (قا^2 س − قا س ظا س) ء س

= ظا س − قا س + ث

(١٣) $\int$ قتا س (ظتا س − قتا س) ء س

= $\int$ (قتا س ظتا س − قتا^2 س) ء س

= − قتا س + ظتا س + ث

(١٤) $\int$ ٦ قا ٢ س (ظا ٢ س + جتا^2 ٢ س) ء س

= $\int$ (٦ قا ٢ س ظا ٢ س + ٦ جتا ٢ س) ء س

= ٦ × $\frac{1}{2}$ قا ٢ س + ٦ × $\frac{1}{2}$ جا ٢ س + ث

= ٣ قا ٢ س + ٣ جا ٢ س + ث

(١٥) $\int$ قا س (٣ جتا س − ٢ قا س) ء س

= $\int$ (٣ − ٢ قا^2 س) ء س

= ٣ س − ٢ ظا س + ث

---

(١) $\int$ (جتا^2 س − جا^2 س) ء س

= $\int$ جتا ٢ س ء س

= $\frac{1}{2}$ جا ٢ س + ث

(٢) $\int$ جا ٣ س جتا ٣ س ء س

= $\int \frac{1}{2}$ جا ٦ س ء س

= $\frac{-1}{12}$ جتا ٦ س + ث

(٣) $\int$ (١ + ظا^2 س) جتا^2 س ء س

= $\int$ (قا^2 س × جتا^2 س) ء س

= $\int$ ء س = س + ث

(٤) $\int$ (١ + ظتا^2 س) جا^2 س ء س

$\int$ قتا^2 س × جا^2 س ء س = $\int$ ء س = س + ث

(١٤) $\int \frac{1}{1 - \text{جتا}^2 \text{س}}$ ء س = $\int \frac{1}{\text{جا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int$ قتا^2 س ء س

= − ظتا س + ث

(١٥) $\int \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{1 - \text{جا س}}$ ء س = $\int \frac{1 - \text{جا}^2 \text{س}}{1 - \text{جا س}}$ ء س

= $\int$ (١ + جا س) ء س

= س − جتا س + ث

(١٦) $\int \frac{1 + \text{جا}^2 \text{س}}{1 - \text{جتا}^2 \text{س}}$ ء س = $\int \frac{1 + \text{جا}^2 \text{س}}{\text{جا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int$ (قتا^2 س + ١) ء س

= − ظتا س + س + ث

(١٧) $\int \frac{1 + \text{جتا}^2 \text{س}}{1 - \text{جا}^2 \text{س}}$ ء س = $\int \frac{1 + \text{جتا}^2 \text{س}}{\text{جتا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int$ (قا^2 س + ١) ء س

= ظا س + س + ث

(١٨) $\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا س + جا س}}$ ء س = $\int \frac{\text{جتا}^2 \text{س − جا}^2 \text{س}}{\text{جتا س + جا س}}$ ء س

= $\int$ (جتا س − جا س) ء س

= جا س + جتا س + ث

(١٩) $\int \frac{\text{جا}^3 \text{س + جتا}^3 \text{س}}{\text{جا س + جتا س}}$ ء س

= $\int \frac{(\text{جا س + جتا س})(\text{جا}^2 \text{س − جا س جتا س + جتا}^2 \text{س})}{(\text{جا س + جتا س})}$ ء س

= $\int$ (جا^2 س + جتا^2 س − جا س جتا س) ء س

= $\int$ (١ − $\frac{1}{2}$ جا ٢ س) ء س

= س + $\frac{1}{4}$ جتا ٢ س + ث

(٢٠) $\int \frac{\text{جتا س}}{1 - \text{جتا}^2 \text{س}}$ ء س = $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int$ قتا س ظتا س ء س

= − قتا س + ث

(٢١) $\int \frac{\text{جتا}^3 \text{س − ٤}}{\text{جتا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int$ (جتا س − ٤ قا^2 س) ء س

= جا س − ٤ ظا س + ث

(٢٢) $\int \frac{1 - 2\,\text{جا}^2 \text{س}}{\text{جا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int$ (قتا^2 س − ٢ جا س) ء س

= − ظتا س + ٢ جتا س + ث

(٢٣) $\int \frac{1}{\text{جا}^2 \text{س جتا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int \frac{1}{(\text{جا س جتا س})^2}$ ء س = $\int \frac{1}{(\frac{1}{2}\,\text{جا ٢ س})^2}$ ء س

= $\int$ ٤ قتا^2 ٢ س ء س = −٢ ظتا ٢ س + ث

(٢٤) $\int \frac{\text{جا}^2 (2\text{س} - 3)}{1 - \text{جتا}(2\text{س} - 3)}$ ء س

= $\int \frac{1 - \text{جتا}^2 (2\text{س} - 3)}{1 - \text{جتا}(2\text{س} - 3)}$ ء س

= $\int$ (١ + جتا (٢ س − ٣)) ء س

= س + $\frac{1}{2}$ جا (٢ س − ٣) + ث

(٢٥) $\int \frac{1}{1 - \text{جتا س}}$ ء س

= $\int \frac{1}{1 - \text{جتا س}} \times \frac{1 + \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}$ ء س

= $\int \frac{1 + \text{جتا س}}{1 - \text{جتا}^2 \text{س}}$ ء س = $\int \frac{1 + \text{جتا س}}{\text{جا}^2 \text{س}}$ ء س

= $\int$ (قتا^2 س + قتا س ظتا س) ء س

= − ظتا س − قتا س + ث

حل آخر :

$\int \frac{1}{2\,\text{جا}^2 \frac{\text{س}}{2}}$ ء س = $\frac{1}{2}$ $\int$ قتا$^2 \frac{\text{س}}{2}$ ء س

= − ظتا $\frac{\text{س}}{2}$ + ث

(٢٦) $\int \left[\frac{\text{قاس}}{\text{قاس + طاس}} \times \frac{\text{قاس − طاس}}{\text{قاس − طاس}}\right] \text{ءس}$

$= \int \left[\frac{\text{قا}^2\text{س − قاس طاس}}{\text{قا}^2\text{س − طا}^2\text{س}}\right] \text{ءس}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س − قاس طاس}) \text{ءس}$

$= \text{طاس − قاس + ث}$

(٢٧) $\int \frac{1 + \text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}} \text{ءس} = \int \left(\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\right) \text{ءس}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س + جاس}) \text{ءس}$

$= \text{− ظتاس − جتاس + ث}$

(٢٨) $\int \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \text{ءس} = \int \frac{2\,\text{جتا}^2\text{س − ١}}{\text{جتا}^2\text{س}} \text{ءس}$

$= \int (2 - \text{قا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \text{٢س − طاس + ث}$

(٢٩) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{جا}^4\text{س}} = \int \text{قتا}^4\text{س ءس}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س} \times \text{قتا}^2\text{س ءس}$

$= \int (1 + \text{ظتا}^2\text{س}) \times \text{قتا}^2\text{س ءس}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س + ظتا}^2\text{س قتا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \text{− ظتاس − } \frac{1}{3}\text{ظتا}^3\text{س + ث}$

(٣٠) $\int \text{ظا}^4\text{س ءس}$

$= \int \text{ظا}^2\text{س (قا}^2\text{س − ١) ءس}$

$= \int (\text{ظا}^2\text{س قا}^2\text{س − ظا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \int (\text{ظا}^2\text{س قا}^2\text{س − قا}^2\text{س + ١}) \text{ءس}$

$= \frac{1}{3}\text{ظا}^3\text{س − ظاس + س + ث}$

(٣١) $\int \text{جاس جا ٢س ءس}$

$= \int \text{جاس} \times \text{٢ جاس جتاس ءس}$

$= \int \text{٢ جا}^2\text{س جتاس ءس}$

$= \frac{2}{3}\text{جا}^3\text{س + ث}$

(٣٢) $\int \text{جتاس جتا ٢س ءس}$

$= \int \text{جتاس (١ − ٢ جا}^2\text{س) ءس}$

$= \int (\text{جتاس − ٢ جتاس جا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \text{جاس − } \frac{2}{3}\text{جا}^3\text{س + ث}$

(٣٣) $\int (\text{ظاس + ظتاس})^2 \text{ءس}$

$= \int (\text{ظا}^2\text{س + ظتا}^2\text{س + ٢}) \text{ءس}$

$= \int [(\text{ظا}^2\text{س + ١}) + (\text{ظتا}^2\text{س + ١})] \text{ءس}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س + قتا}^2\text{س}) \text{ءس} = \text{ظاس − ظتاس + ث}$

٤

(١) $\int \text{جا}^2\text{س ءس} = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س − } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + ث}$

(٢) $\int \text{جتا}^2\text{س ءس} = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س + } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + ث}$

(٣) $\int (1 + \text{جتاس})^2 \text{ءس}$

$= \int (1 + \text{٢ جتاس + جتا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \int \left(1 + \text{٢ جتاس + } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س}\right) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{3}{2} + \text{٢ جتاس + } \frac{1}{2}\text{جتا ٢س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{3}{2}\text{س + ٢ جاس + } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + ث}$

(٤) $(1 - \text{جاس})(1 + \text{جاس}) \text{ءس}$

$= \int (1 - \text{جا}^2\text{س}) \text{ءس} = \int \text{جتا}^2\text{س ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س + } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + ث}$

(٥) $\int (\text{جتا}^2\text{س + جتاس}) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س + جتاس}\right) \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س + } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + جاس + ث}$

(٦) $\int (\text{جتاس + قاس})^2 \text{ءس}$

$= \int (\text{جتا}^2\text{س + ٢ + قا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س + ٢ + قا}^2\text{س}\right) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س + قا}^2\text{س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{5}{2}\text{س + } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + ظاس + ث}$

(٧) $\int (\text{جاس + قتاس})^2 \text{ءس}$

$= \int (\text{جا}^2\text{س + ٢ + قتا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢س + ٢ + قتا}^2\text{س}\right) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢س + قتا}^2\text{س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{5}{2}\text{س − } \frac{1}{4}\text{جا ٢س − ظتاس + ث}$

(٨) $\int (\text{ظا}^2\text{س + ٢ جا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س − ١ + ١ − جتا ٢س}) \text{ءس}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س − جتا ٢س}) \text{ءس}$

$= \text{ظاس − } \frac{1}{2}\text{جا ٢س + ث}$

(٩) $\int \left(\frac{3}{\text{قتا}^2\text{س}} - \text{٤ قتا}^2\text{٥س}\right) \text{ءس}$

$= \int (\text{٣ جا}^2\text{س − ٤ قتا}^2\text{٥س}) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{جتا ٢س − ٤ قتا}^2\text{٥س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{3}{2}\text{س − } \frac{3}{4}\text{جا ٢س − } \frac{4}{5}\text{ظا ٥س + ث}$

(١٠) $\int \frac{\text{ءس}}{1 + \text{ظا}^2\text{س}} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \text{جتا}^2\text{س ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س}\right) \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س + } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + ث}$

(١١) $\int (\text{جتاس + ظاس})^2 \text{ءس}$

$= \int (\text{جتا}^2\text{س + ٢ جاس + ظا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا ٢س + ٢ جاس}\right.$
$\left.\text{+ قا}^2\text{س − ١}\right) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\text{جتا ٢س + ٢ جاس + قا}^2\text{س − } \frac{1}{2}\right) \text{ءس}$

$= \frac{1}{4}\text{جا ٢س − ٢ جتاس + ظاس − } \frac{1}{2}\text{س + ث}$

(١٢) $\int (\text{جاس + ظتاس})^2 \text{ءس}$

$= \int (\text{جا}^2\text{س + ٢ جتاس + ظتا}^2\text{س}) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا ٢س + ٢ جتاس}\right.$
$\left.\text{+ قتا}^2\text{س − ١}\right) \text{ءس}$

$= \int \left(-\frac{1}{2}\text{جتا ٢س + ٢ جتاس}\right.$
$\left.\text{+ قتا}^2\text{س − } \frac{1}{2}\right) \text{ءس}$

$= \text{− } \frac{1}{4}\text{جا ٢س + ٢ جاس}$
$\text{− ظتاس − } \frac{1}{2}\text{س + ث}$

(١٣) $\int \text{ظا (٣س + ١) ءس}$

$= \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا (٣س + ١)}| + \text{ث}$

$= \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتا (٣س + ١)}| + \text{ث}$

(١٤) $\int \text{ظتا (٢س − ١) ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتا ٢س}| + \text{ث}$

(١٥) $\int \text{قتا (٥ − ٢س) ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتا (٥ − ٢س) + ظا (٥ − ٢س)}| + \text{ث}$

(١٦) $\int \text{قتا (٤س + ٧) ءس}$

$= \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتا (٤س + ٧) + ظتا (٤س + ٧)}| + \text{ث}$

(١٧) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}} \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظاس}| + \text{ث}$

(١٨) $\int \frac{\text{قتا}^2\text{س}}{\text{ظتاس}} \text{ءس} = \text{− لو}_{\text{هـ}} |\text{ظتاس}| + \text{ث}$

(١٩) $\int \frac{1 - \text{ظاس}}{1 + \text{ظاس}} \text{ءس بالضرب} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$

$= \int \frac{\text{جتاس − جاس}}{\text{جتاس + جاس}} \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس + جاس}| + \text{ث}$

(٢٠) $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس − ١}} \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قاس − ١}| + \text{ث}$

(١٦) $\int$ ٤ جا^{٤} س ءس

= $\int$ ٤ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س)^{٢} ءس

= $\int$ (١ − جتا ٢ س)^{٢} ءس

= $\int$ ١ − ٢ جتا ٢ س + جتا^{٢} ٢ س ءس

= $\int$ (١ − ٢ جتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٤ س) ءس

= $\int$ ($\frac{٣}{٢}$ − ٢ جتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٤ س) ءس

= $\frac{٣}{٢}$ س − جا ٢ س + $\frac{١}{٨}$ جا ٤ س + ث

(١٧) $\int$ ظا^{٢} س ءس

= $\int$ ظا^{٢} س ظاس ءس

= $\int$ (قا^{٢} س − ١) ظاس ءس

= $\int$ (قا^{٢} س ظاس − ظاس) ءس

= $\frac{١}{٢}$ ظا^{٢} س − لوهـ |قاس| + ث

(١٨) $\int$ ظتا^{٢} س ءس

= $\int$ ظتا^{٢} س ظتاس ءس

= $\int$ (قتا^{٢} س − ١) ظتاس ءس

= $\int$ (ظتاس قتا^{٢} س − ظتاس) ءس

= − $\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢} س + لوهـ |قتاس| + ث

(١٩) $\int$ ظا^{٢} س قا^{٤} س ءس

= $\int$ ظاس ظا^{٢} س قا^{٤} س ءس

= $\int$ ظاس (قا^{٢} س − ١) قا^{٤} س ءس

= $\int$ (ظاس قا^{٦} س − ظاس قا^{٤} س) ءس

= $\int$ قا^{٥} س (ظاس قاس)

− قا^{٣} س (ظاس قاس) ءس

= $\frac{١}{٦}$ قا^{٦} س − $\frac{١}{٤}$ قا^{٤} س + ث

(٢٠) $\int$ ظا^{٣} س قا^{٣} س ءس

= $\int$ ظا^{٢} س قا^{٢} س ظاس قاس ءس

= $\int$ (قا^{٢} س − ١) قا^{٢} س (قاس ظاس) ءس

= $\int$ قا^{٤} س (قاس ظاس)

− قا^{٢} س (قاس ظاس) ءس

= $\frac{١}{٥}$ قا^{٥} س − $\frac{١}{٣}$ قا^{٣} س + ث

(٢١) $\int$ (١ + جاس) هـ$^{س − جتاس}$ ءس

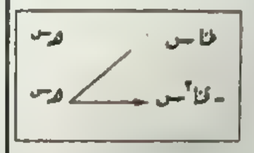
= هـ$^{س − جتاس}$ + ث

(٢٢) $\int$ هـ^{س} جتا هـ^{س} ءس = جا هـ^{س} + ث

(٢٣) $\int$ هـ^{س} (ظتاس − قتا^{٢} س) ءس

= $\int$ (هـ^{س} ظتاس

− هـ^{س} قتا^{٢} س) ءس



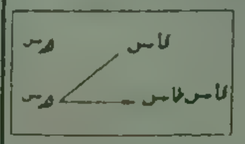
= $\int$ هـ^{س} ظتاس ءس − $\int$ هـ^{س} قتا^{٢} س ءس

= هـ^{س} ظتاس + $\int$ هـ^{س} (قتا^{٢} س) ءس

− $\int$ هـ^{س} قتا^{٢} س ءس = هـ^{س} ظتاس + ث

(٢٤) $\int$ هـ^{س} قاس (١ + ظاس) ءس

= $\int$ هـ^{س} قاس ءس



+ $\int$ هـ^{س} قاس ظاس ءس

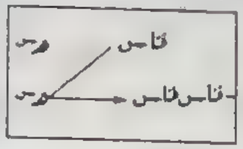
= هـ^{س} قاس − $\int$ هـ^{س} قاس ظاس ءس

+ $\int$ هـ^{س} قاس ظاس ءس

= هـ^{س} قاس + ث

(٢٥) $\int$ هـ^{س} قاس (١ − ظاس) ءس

= $\int$ هـ^{س} قاس ءس



− $\int$ هـ^{س} قاس ظاس ءس

= هـ^{س} قاس + $\int$ هـ^{س} قاس ظاس ءس

− $\int$ هـ^{س} قاس ظاس ءس

= هـ^{س} قاس + ث

(٢٦) $\int$ (جاس هـ^{جاس} + ٣ س^{٢}) ءس

= هـ^{جاس} + س^{٣} + ث

(٢٧) $\int$ (قاس هـ^{ظاس})^{٢} ءس

= $\int$ قا^{٢} س هـ$^{٢ ظاس}$ ءس

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ ٢ قا^{٢} س هـ$^{٢ ظاس}$ ءس

= $\frac{١}{٢}$ هـ$^{٢ ظاس}$ + ث

(٢٨) $\int$ ٢^{جاس} جتاس ءس = $\frac{٢^{جاس}}{لوهـ ٢}$ + ث

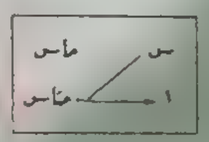
(٢٩) $\int$ $\frac{٥^{ظاس}}{جا^{٢} س}$ ءس = $\int$ ٥^{ظاس} (قتا^{٢} س) ءس

= $\frac{-٥^{ظاس}}{لوهـ ٥}$ + ث

(٣٠) $\int$ س جاس ءس

= − س جتاس

− $\int$ − جتاس ءس

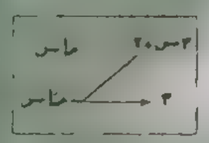


= − س جتاس + جاس + ث

(٣١) $\int$ (٣ س + ٢) جاس ءس

= − (٣ س + ٢) جتاس

+ $\int$ ٣ جتاس ءس

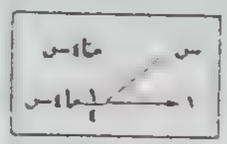


= − (٣ س + ٢) جتاس + ٣ جاس + ث

(٣٢) $\int$ س جتا ٤ س ءس

= $\frac{١}{٤}$ س جا ٤ س

− $\frac{١}{٤}$ $\int$ جا ٤ س ءس



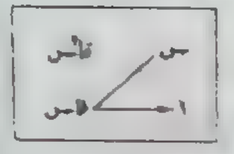
= $\frac{١}{٤}$ س جا ٤ س − $\frac{١}{٤}$ × $\frac{-١}{٤}$ جتا ٤ س + ث

= $\frac{١}{٤}$ س جا ٤ س + $\frac{١}{١٦}$ جتا ٤ س + ث

(٣٣) $\int$ س قا^{٢} س ءس

= س ظاس

− $\int$ ظاس ءس



= س ظاس − لوهـ |قاس| + ث

أ

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (أ)

(٥) (أ) (٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (أ)

(٩) (ب) (١٠) (ب) (١١) (جـ) (١٢) (أ)

(١٣) (جـ) (١٤) (جـ) (١٥) (ب) (١٦) (جـ)

(١٧) (جـ) (١٨) (د) (١٩) (د) (٢٠) (ب)

(٢١) (د) (٢٢) (أ) (٢٣) (ب) (٢٤) (ب)

(٢٥) (د) (٢٦) (ب) (٢٧) (ب) (٢٨) (أ)

(٢٩) (ب) (٣٠) (جـ)

ب

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٧ − جا ٢ س بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = ٧ س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + ث

٥ = ٧ (٠) + $\frac{١}{٢}$ جتا (٠) + ث

∴ ث = $\frac{٩}{٢}$

∴ ص = ٧ س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + $\frac{٩}{٢}$

٩

$\frac{ءص}{ءس}$ = جاس جتاس بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = $\int$ جاس جتاس ءس = $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} س + ث

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ تكون ص = ١

١ = $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ + ث ∴ ث = $\frac{٧}{٨}$

ص = $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} س + $\frac{٧}{٨}$

١٠

∵ دَ(س) = قا^{٢} س − جاس

∴ د(س) = $\int$ (قا^{٢} س − جاس) ءس

= ظاس + جتاس + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ظا $\frac{\pi}{٤}$ + جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ث

∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ث ∴ ث = −١

∴ المعادلة هي ص = ظاس + جتاس − ١

١١

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = π قا^{٢} π س

∴ ص = $\int$ π قا^{٢} π س ءس

∴ ص = $\frac{\pi \times ظا\, \pi س}{\pi}$ + ث

∴ ص = ظا π س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، ٥)

∴ ٥ = ظا $\frac{\pi}{٤}$ + ث ∴ ث = ٤

∴ المعادلة هي ص = ظا π س + ٤

١٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ π جتا π س ، ٣ π جا π س بالتكامل

ص = $\int$ (٣ π جا π س ، ٣ π جا π س) ءس

= ٣ جا π س ، ٣ جتا π س + ث

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٢)

−٢ = ٣ جا π + ٣ جتا π + ث ∴ ث = صفر

∴ ص = ٣ جا π س + ٣ جتا π س

١٣

صَ = ٢ جتا ٢ س بالتكامل بالنسبة إلى س

صَ = $\int$ ٢ جتا ٢ س ءس

صَ = جا ٢ س + ث$_{١}$

∵ معادلة المماس هي ص = س + ١

∴ الميل = ١ عند س = ٠

١ = جا ٠ + ث$_{١}$ ∴ ث$_{١}$ = ١

∴ صَ = جا ٢ س + ١ بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = $\int$ (جا ٢ س + ١) ءس

= −$\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + س + ث$_{٢}$

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

١ = −$\frac{١}{٢}$ جتا ٠ + ٠ + ث$_{٢}$ ث$_{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ص = −$\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + س + $\frac{٣}{٢}$

١٤

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س}{١ + جتاص}$

∴ (١ + جتاص) ءص = س ءس

∴ $\int$ (١ + جتاص) ءص = $\int$ س ءس

∴ ص + جاص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث

، ∵ المنحنى يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ ث = ٠

∴ معادلة المنحنى هي ص + جاص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

١٥

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{س}{٢}$

بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = $\int$ (٢ س + $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{س}{٢}$) ءس

= س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ × ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ + ث

المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ٩)

∴ $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ٩ = ($\frac{\pi}{٢}$)^{٢} + ظا $\frac{\pi}{٤}$ + ث ث = ٨

∴ ص = س^{٢} + ظا $\frac{س}{٢}$ + ٨

١٦

$\frac{ءص}{ءس}$ = أ قتا^{٢} س بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = −أ ظتاس + ث

المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، ١)

٥ = −أ + ث (١)

١ = أ + ث (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ث = ٣ ، أ = −٢

∴ المعادلة ص = ٢ ظتاس + ٣

١٧

$\frac{ءص}{ءس}$ = قتا^{٢} س ظتاس بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = −$\int$ (−قتا^{٢} س) ظتاس ءس

ص = −$\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢} س + ث

المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢$\frac{١}{٢}$)

$\frac{٥}{٢}$ = −$\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢} ($\frac{\pi}{٤}$) + ث ث = ٣

∴ ص = −$\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢} س + ٣

١٨

ميل العمودى = (٢ ص + ١) قتاس

∴ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-١}{(٢ ص + ١) قتاس}$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س بعد فصل المتغيرات

$\int$ (٢ ص + ١) $\frac{ءص}{ءس}$ ءس = $\int$ −جاس ءس

$\int$ (٢ ص + ١) ءص = −$\int$ جاس ءس

ص^{٢} + ص = جتاس + ث

المنحنى يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) ∴ ث = −١

∴ المعادلة ص^{٢} + ص = جتاس − ١

١٩

∵ ص^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ = جا^{٢} س

∴ $\int$ ص^{٢} ءص = $\int$ جا^{٢} س ءس

∴ $\int$ ص^{٢} ءص = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) ءس

∴ $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١) ∴ ث = $\frac{١}{٣}$

∴ $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٣}$

∴ ٤ ص^{٣} = ٣ (٢ س − جا ٢ س) + ٤

٢٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = جتاس − جاس بالتكامل بالنسبة إلى س

ص = $\int$ (جتاس − جاس) ءس

ص = جاس + جتاس + ث (١)

لإيجاد النقط الحرجة نضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ جتاس − جاس = ٠

منها س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = −جاس − جتاس

($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$)$_{س = \frac{\pi}{٤}}$ < ٠ عندها قيمة عظمى ،

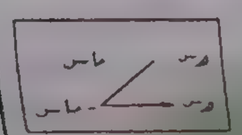
($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$)$_{س = \frac{٥\pi}{٤}}$ > ٠ عندها قيمة صغرى

∴ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{٥\pi}{٤}$ ، −٢ $\sqrt{٢}$)

∴ من (١) ث = −$\sqrt{٢}$

المعادلة هي ص = جاس + جتاس − $\sqrt{٢}$

٢١



① $\int$ هـ^{س} جاس ءس

ك = −هـ^{س} جتاس

−$\int$ −هـ^{س} جتاس ءس

$ك = - هـ^{س} جتاس$

$+ \int هـ^{س} جتاس \, ءس$

$ك = - هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس$

$- \int هـ^{س} جاس \, ءس$

$= - هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس - ك$

بإضافة ك للطرفين

$٢ ك = - هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس + ث$

$\therefore$ التكامل $= \frac{١}{٢} هـ^{س} (جاس - جتاس) + ث$

② $\int هـ^{س} جتاس \, ءس$

$\therefore ك = هـ^{س} جاس$

$- \int هـ^{س} جاس \, ءس$

$= هـ^{س} جاس$

$- [- هـ^{س} جتاس$

$- \int - هـ^{س} جتاس \, ءس]$

$= هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس - ك$

بإضافة ك للطرفين

$٢ ك = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس + ث$

$ك = \frac{١}{٢} هـ^{س} (جاس + جتاس) + ث$

③ $\int \frac{س}{جا^{٢} ٥س} \, ءس$

$= \int س \, قا^{٢} ٥س \, ءس$

$- \frac{١}{٥} س ظا ٥س$

$- \int \frac{١}{٥} ظا ٥س \, ءس$

$= \frac{١}{٥} س ظا ٥س + \frac{١}{٥}$

$\times \frac{١}{٥} لو_{هـ} |قا ٥س| + ث$

$- \frac{١}{٥} س ظا ٥س - \frac{١}{٢٥} لو_{هـ} |قا ٥س| + ث$

④ $\int قا^{٢} س \, ءس = \int قا^{٢} س \cdot قاس \, ءس$

$ك = \int (١ + ظا^{٢} س) قاس \, ءس$

$= \int قاس \, ءس$

$+ \int ظا^{٢} س قاس \, ءس$

$= لو_{هـ} |قاس + ظاس| + ظاس قاس$

$- \int قا^{٣} س \, ءس$

$ك = لو_{هـ} |قاس + ظاس| + ظاس قاس - ك$

$٢ ك = لو_{هـ} |قاس + ظاس| + ظاس قاس + ث$

$ك = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |قاس + ظاس|$

$+ \frac{١}{٢} ظاس قاس + ث$

⑤ $\int جتا (لو_{هـ} س) \, ءس$

نفرض ع $= لو_{هـ} س$

$\therefore ءع = \frac{١}{س} ءس$

$س = هـ^{ع}$

التكامل (ك) $= \int جتاع \times هـ^{ع} ءع$

$ك = هـ^{ع} جاع$

$- \int هـ^{ع} جاع \, ءع$

$ك = هـ^{ع} جاع + هـ^{ع} جتاع$

$- \int هـ^{ع} جتاع \, ءع$

$ك = هـ^{ع} جاع$

$+ هـ^{ع} جتاع - ك$

$٢ ك = هـ^{ع} جاع + هـ^{ع} جتاع + ث$

$\therefore ك = \frac{١}{٢} هـ^{ع} (جاع + جتاع) + ث$

$= \frac{١}{٢} س (جا (لو_{هـ} س)$

$+ جتا (لو_{هـ} س)) + ث$

⑥ $\int جا ٥س \, جا ٣س \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int ٢ جا ٥س \, جا ٣س \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int [جا ٥س \, جا ٣س + جتا ٥س \, جتا ٣س$

$- جتا ٥س \, جتا ٣س + جا ٥س \, جا ٣س] ءس$

$= \frac{١}{٢} \int [جتا (٥س - ٣س)$

$- جتا (٥س + ٣س)] ءس$

$= \frac{١}{٢} \int [جتا ٢س - جتا ٨س] ءس$

$= \frac{١}{٤} جا ٢س - \frac{١}{١٦} جا ٨س + ث$

اجابات تمارين 17

أ

$\int_{-٢}^{٤} (٣س^{٢} - ٢) ءس$

$= [س^{٣} - ٢س]_{-٢}^{٤}$

$= [٤^{٣} - ٢(٤)] - [(-٢)^{٣} - ٢(-٢)]$

$= ٥٦ + ٤ = ٦٠$

ب

① $\int_{١}^{٤} ٧ ءس = [٧س]_{١}^{٤} = ٧ \times ٤ - ٧ \times ١ = ٢١$

② $\int_{١}^{٢} (٢س + ٣) ءس = [س^{٢} + ٣س]_{١}^{٢}$

$= (٤ + ٦) - (١ - ٣)$

$= ١٢$

③ $\int_{١}^{٢} (٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥) ءس$

$= [س^{٤} - ٢س^{٣} + ٥س]_{١}^{٢} = ٤٢ - (-٢)$

$= ٤٤$

④ $\int_{١}^{٤} (٥س \sqrt{س} - ٣س^{\frac{١}{٢}}) ءس$

$= \int_{١}^{٤} (٥س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}}) ءس$

$= [٢س^{\frac{٥}{٢}} - ٢س^{\frac{٣}{٢}}]_{١}^{٤} = ٤٨ - ٠ = ٤٨$

⑤ $\int_{-٢}^{٤} (س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}) ءس$

$- \int_{-٢}^{٤} (س^{٢} + س^{-٢}) ءس$

$- [\frac{١}{٣} س^{٣} - س^{-١}]_{-٢}^{٤} = \frac{٢٥٣}{١٢} - \frac{١٣}{٦} = \frac{٢٢٧}{١٢}$

⑥ $\int_{١}^{٣} \frac{٦ - س^{٤}}{٢س^{٢}} ءس - \int_{١}^{٣} (٣س^{٢} - \frac{١}{٢} س^{-٢}) ءس$

$- [-٣س^{-١} - \frac{١}{٦} س^{٣}]_{١}^{٣}$

$= \frac{-١١}{٢} - (\frac{-١٩}{٦}) = \frac{-٧}{٣}$

⑦ $\int_{٠}^{٥} \sqrt{٣س + ١} \, ءس = \int_{٠}^{٥} (٣س + ١)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$= [\frac{(٣س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times \frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٥}$

$= [\frac{٢}{٩} (٣س + ١)^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٥}$

$= \frac{١٢٨}{٩} - \frac{٢}{٩} = ١٤$

⑧ $\int_{٠}^{١} (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}} ءس = [\frac{١}{٥} (٢س + ١)^{\frac{٥}{٢}}]_{٠}^{١}$

$= \frac{٢٤٣}{٥} - \frac{١}{٥} = \frac{٢٤٢}{٥}$

⑨ $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}} ءن = \int_{٠}^{٥} ٣ (ن + ٤)^{-\frac{١}{٢}} ءن$

$= [٦ (ن + ٤)^{\frac{١}{٢}}]_{٠}^{٥}$

$= ١٨ - ١٢ = ٦$

⑩ $\int_{١}^{٠} \frac{ءن}{\sqrt{٨ - ن}} = \int_{١}^{٠} (٨ - ن)^{-\frac{١}{٢}} ءن$

$= [-٢ (٨ - ن)^{\frac{١}{٢}}]_{١}^{٠}$

$= -٤\sqrt{٢} - (-٤) = ٤ - ٤\sqrt{٢}$

⑪ $\int_{١}^{٤} \frac{س}{\sqrt{س} - ١} ءس = \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} + ١) ءس$

$= [\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + س]_{١}^{٤}$

$= \frac{٢٨}{٣} - \frac{٥}{٣} = \frac{٢٣}{٣}$

⑨ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ (جاس + جتاس) ءس

= [− جتاس + جاس]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ = ١ − (−١) = ٢

⑩ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا ع قا^{٢} ع ءع = [$\frac{١}{٢}$ قا^{٢} ع]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

= $\frac{١}{٢}$ − ٠ = $\frac{١}{٢}$

⑪ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\text{ءس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ قا^{٢} س ءس

= [− ظاس]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ = ٠ − (−١) = ١

⑫ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ءس = $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ قاس ظاس ءس

= [قاس]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ = ٢ − ١ = ١

---

① $\int_{١}^{٢}$ $\frac{\text{هـ}^{٢}}{\text{س}}$ ءس = [٢ لوهـ |س|]$_{١}^{٢}$

= ٢ لوهـ هـ − ٢ لوهـ ١ = ٢

② $\int_{١}^{١}$ $\frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ = [لوهـ |س|]$_{١}^{١}$

= لوهـ ١ − لوهـ هـ = −١

③ $\int_{٥}^{١}$ $\frac{٢}{\text{س}}$ ءس = [٢ لوهـ |س|]$_{٥}^{١}$

= ٢ [لوهـ ١ − لوهـ ٥]

= −٢ لوهـ ٥

④ $\int_{٠}^{١}$ هـ$^{٢\text{س}}$ ءس = $\int_{٠}^{١}$ [هـ$^{٢\text{س}}$]$'$ ءس

= $\int_{٠}^{١}$ [هـ$^{٢\text{س}}$ × ٢]

= $\int_{٠}^{١}$ (هـ$^{٢\text{س}}$ × ٢)

⑤ $\int_{٠}^{١}$ هـ^{س} (٢ + هـ^{س})^{٢} ءس

= $\int_{٠}^{١}$ (٢ + هـ^{س})^{٢} × هـ^{س} ءس

= $\int_{٠}^{١}$ (٢ + هـ^{س})^{٢} × (هـ^{س})$'$ ءس

= [$\frac{١}{٣}$ (٢ + هـ^{س})^{٣}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٣}$ (٢ + هـ^{١})^{٣} − $\frac{١}{٣}$ (٢ + هـ^{٠})^{٣}

= $\frac{١}{٣}$ (٢ + هـ)^{٣} − $\frac{١}{٣}$ (٣)^{٣}

---

⑥ $\int_{٠}^{١}$ (جاس + جتاس) ءس

= [− جتاس + جاس]$_{٠}^{\frac{\pi}{2}}$ = ١ − (−١) = ٢

⑦ $\int_{٠}^{١}$ ٢ س هـ$^{\text{س}^{٢}}$ ءس

= $\frac{١}{٢}$ $\int_{٠}^{١}$ ٢ س هـ$^{\text{س}^{٢}}$ ءس

= $\frac{١}{٢}$ [هـ$^{\text{س}^{٢}}$]$_{٠}^{١}$ = $\frac{١}{٢}$ [هـ − ١]

⑧ $\int_{\text{لو}_{\text{هـ}}٢}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤}$ (٢ هـ$^{٢\text{س}}$ − هـ^{س}) ءس

= [هـ$^{٢\text{س}}$ − هـ^{س}]$_{\text{لو}_{\text{هـ}}٢}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤}$

= (هـ$^{٢\text{لو}_{\text{هـ}}٤}$ − هـ$^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤}$) − (هـ$^{٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢}$ − هـ$^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢}$)

= (١٦ − ٤) − (٤ − ٢) = ١٠

---

① $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس + $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

= $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

② $\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{\text{س}}$ ءس + $\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{\text{س}}$ ءس

= $\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{\text{س}}$ ءس + $\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{\text{س}}$ ءس

= $\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{\text{س}}$ ءس

③ $\int_{٠}^{١}$ ق ءس + $\int_{٠}^{١}$ ق ءس

= $\int_{٠}^{١}$ ق ءس + $\int_{٠}^{١}$ ق ءس

= $\int_{٠}^{١}$ ق ءس

④ $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس + $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

= $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس + $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

= $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

---

① $\int_{٠}^{١}$ (س + ٢) ءس + $\int_{٠}^{١}$ (س + ٢) ءس

= $\int_{٠}^{١}$ (س + ٢) ءس + $\int_{٠}^{١}$ (س + ٢) ءس

= $\int_{٠}^{١}$ (س + ٢) ءس

② $\int_{٠}^{١}$ ٢ س (س + ٢) ءس + $\int_{٠}^{١}$ ٢ س (س + ٢) ءس

= $\int_{٠}^{١}$ ٢ س (س + ٢) ءس + $\int_{٠}^{١}$ ٢ س (س + ٢) ءس

= $\int_{٠}^{١}$ ٢ س (س + ٢) ءس

③ $\int_{٠}^{١}$ [٢ س (س + ٢) + ٢ س (س + ٢)] ءس

= $\int_{٠}^{١}$ [٢ س (س + ٢) + ٢ س (س + ٢)] ءس

= $\int_{٠}^{١}$ [٢ س (س + ٢) + ٢ س (س + ٢)] ءس

$\int_{٠}^{١}$ [س (س + ٢) + س (س + ٢)] ءس

= $\int_{٠}^{١}$ [س (س + ٢) + س (س + ٢)] ءس

= $\int_{٠}^{١}$ [س (س + ٢) + س (س + ٢)] ءس

= $\int_{٠}^{١}$ [س (س + ٢) + س (س + ٢)] ءس

= $\int_{٠}^{١}$ [س (س + ٢) + س (س + ٢)] ءس

$$\int_{-1}^{4} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{4} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{-1}^{2} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= ٢٥٥ - \left(-(-١٥)\right) = ٢٤٠$$

$$\int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{2} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{2}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{2}^{3} (٣\text{س} - ٢)\,\text{ءس} + \int_{0}^{2} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right]_{2}^{3} + \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{١١}{٢} + \frac{٨}{٣} = \frac{٤٩}{٦}$$

$$\int_{-2}^{6} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-2}^{2} ٢\,\text{ءس} + \int_{2}^{6} \text{س}\,\text{ءس}$$

$$= \left[٢\text{س}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{2}^{6}$$

$$= (٤ - -٤) + (١٨ - ٢) = ٢٠$$

$$\int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{0} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{0} ٢\text{س} + ٢\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{0}^{3} ٢\text{س} - \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$\left[\text{س}^{٢} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{-1}^{0} + \left[\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{0}^{3}$$

$$= \frac{-٢}{٣} + ٠ - -\frac{٢}{٣}$$

$$\int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{1} (\text{س}^{٢} + ١)\,\text{ءس} + \int_{1}^{3} (٣\text{س} - ١)\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{٤}{٣} + \frac{٧}{٢} = \frac{٢٩}{٦}$$

---

① $\int_{-1}^{3} |\text{س} - ١|\,\text{ءس}$ ، $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} - ١|$

$$= \begin{cases} -\text{س} + ١ & ، \text{س} < ١ \\ \text{س} - ١ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{1} (-\text{س} + ١)\,\text{ءس} + \int_{1}^{3} (\text{س} - ١)\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}\right]_{1}^{3}$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

② $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} - ٣|$

$$= \begin{cases} -\text{س} + ٣ & ، \text{س} < ٣ \\ \text{س} - ٣ & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{0}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{0}^{3} (-\text{س} + ٣)\,\text{ءس}$$

$$+ \int_{3}^{5} (\text{س} - ٣)\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{-١}{٢}\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\right]_{0}^{3}$$

$$+ \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right]_{3}^{5} = \frac{٩}{٢} + ٢ = \frac{١٣}{٢}$$

③ $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} - ٢|$

$$= \begin{cases} -\text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^{4} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-2}^{2} (-\text{س} + ٢)\,\text{ءس} + \int_{2}^{4} (\text{س} - ٢)\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right]_{2}^{4}$$

$$= ٨ + ٢ = ١٠$$

④ $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} + ١|$

$$= \begin{cases} -\text{س} - ١ & ، \text{س} < -١ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} \geq -١ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-4}^{2} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-4}^{-1} (-\text{س} - ١)\,\text{ءس} + \int_{-1}^{2} (\text{س} + ١)\,\text{ءس}$$

$$- \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}\right]_{-4}^{-1} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{٩}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٩$$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = |٢\text{س} - ٣|$

$$= \begin{cases} -٢\text{س} + ٣ & ، \text{س} < \frac{٣}{٢} \\ ٢\text{س} - ٣ & ، \text{س} \geq \frac{٣}{٢} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{٣}{٢}} (-٢\text{س} + ٣)\,\text{ءس} + \int_{\frac{٣}{٢}}^{3} (٢\text{س} - ٣)\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\right]_{0}^{\frac{٣}{٢}} + \left[\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right]_{\frac{٣}{٢}}^{3}$$

$$= \frac{٩}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٢}$$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = |٢\text{س} - ١|$

$$= \begin{cases} -٢\text{س} + ١ & ، \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٢\text{س} - ١ & ، \text{س} \geq \frac{١}{٢} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{0}^{2} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{١}{٢}} (-٢\text{س} + ١)\,\text{ءس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{2} (٢\text{س} - ١)\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\text{س}^{٢} + \text{س}\right]_{0}^{\frac{١}{٢}} + \left[\text{س}^{٢} - \text{س}\right]_{\frac{١}{٢}}^{2}$$

$$= \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{٢}$$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤} = |\text{س} + ٢|$

$$= \begin{cases} -\text{س} - ٢ & ، \text{س} < -٢ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} \geq -٢ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-4}^{1} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-4}^{-2} (-\text{س} - ٢)\,\text{ءس}$$

$$+ \int_{-2}^{1} (\text{س} + ٢)\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right]_{-4}^{-2}$$

$$+ \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\right]_{-2}^{1} = \frac{١}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٥$$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}|\text{س}| = \begin{cases} -\text{س}^{٢} & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

$$\therefore \int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{0} -\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{0}^{3} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{0}^{3}$$

$$= \frac{-١}{٣} + ٩ = \frac{٢٦}{٣}$$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}|\text{س} - ٤|$

$$= \begin{cases} -٣\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} & ، \text{س} < ٤ \\ ٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{1}^{3} (-٣\text{س}^{٢} + ١٢\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢}\right]_{1}^{3} = ٢٠$$

⑩ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}|\text{س} - ١|$

$$= \begin{cases} -\text{س}^{٢} + \text{س} & ، \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} - \text{س} & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{-2}^{1} (-\text{س}^{٢} + \text{س})\,\text{ءس}$$

$$+ \int_{1}^{3} (\text{س}^{٢} - \text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{-2}^{1}$$

$$+ \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{1}^{3} = \frac{-٩}{٢} + \frac{١}{٦} = -٣\frac{٢}{٣}$$

(١١)

د (س) = |س٢ - ٩|

$$= \begin{cases} س^٢ - ٩ & ، س \le -٣ \\ -س^٢ + ٩ & ، -٣ < س < ٣ \\ س^٢ - ٩ & ، س \ge ٣ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-١}^{١} د(س)\,ءس = \int_{-١}^{١} (-س^٢ + ٩)\,ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٩س\right]_{-١}^{١}$$

$$= \frac{٥٢}{٣}$$

(١٢)

د (س) = |س٢ - ٤|

$$= \begin{cases} س^٢ - ٤ & ، س \le -٢ \\ -س^٢ + ٤ & ، -٢ < س < ٢ \\ س^٢ - ٤ & ، س \ge ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-٣}^{٣} د(س)\,ءس$$

$$= \int_{-٣}^{-٢} (س^٢ - ٤)\,ءس$$

$$+ \int_{-٢}^{٢} (-س^٢ + ٤)\,ءس$$

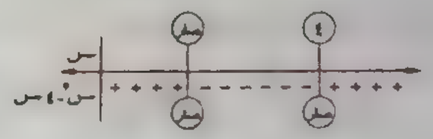
$$+ \int_{٢}^{٣} (س^٢ - ٤)\,ءس$$

$$\left[\frac{١}{٣}س^٣ - ٤س\right]_{-٣}^{-٢} + \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٤س\right]_{-٢}^{٢}$$

$$+ \left[\frac{١}{٣}س^٣ - ٤س\right]_{٢}^{٣} = \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣}$$

$$= \frac{٤٦}{٣} = ١٥\frac{١}{٣}$$

(١٣)



د (س) = |س٢ - ٤س|

$$= \begin{cases} س^٢ - ٤س & ، س \le ٠ \\ -س^٢ + ٤س & ، ٠ < س < ٤ \\ س^٢ - ٤س & ، س \ge ٤ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-١}^{٥} د(س)\,ءس = \int_{-١}^{٠} (س^٢ - ٤س)\,ءس$$

$$+ \int_{٠}^{٤} (-س^٢ + ٤س)\,ءس$$

$$+ \int_{٤}^{٥} (س^٢ - ٤س)\,ءس$$

$$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - ٢س^٢\right]_{-١}^{٠}$$

$$+ \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٢س^٢\right]_{٠}^{٤} + \left[\frac{١}{٣}س^٣ - ٢س^٢\right]_{٤}^{٥}$$

$$= \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣} = \frac{٤٦}{٣} = ١٥\frac{١}{٣}$$

---

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (ب)
(٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (ب) (١٠) (جـ)
(١١) (ب) (١٢) (ب) (١٣) (جـ) (١٤) (أ) (١٥) (د)
(١٦) (أ) (١٧) (ب)

---

(١) ∵ د (س) = $\frac{س}{١ + س^٢}$ فردية

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} \frac{س}{١ + س^٢}\,ءس = صفر$$

(٢) ∵ د (س) = $\frac{س^٣ - ٣س}{س^٢ + ١}$ فردية

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} \frac{س^٣ - ٣س}{س^٢ + ١}\,ءس = صفر$$

(٣) ∵ د (س) = س٢ - ١ زوجية

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} (س^٢ - ١)\,ءس = ٢\int_{٠}^{٢} (س^٢ - ١)\,ءس$$

$$= ٢\left[\frac{١}{٣}س^٣ - س\right]_{٠}^{٢} = ١٢$$

(٤) ∵ د (س) = س٣ $\sqrt{س^٢ + ٣}$ فردية

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} \left(س^٣\sqrt{س^٢ + ٣}\right)ءس = صفر$$

(٥) ∵ د (س) = ٤ - |س| زوجية

$$\therefore \int_{-٤}^{٤} د(س)\,ءس = ٢\int_{٠}^{٤} (٤ - |س|)\,ءس$$

$$= ٢\int_{٠}^{٤} (٤ - س)\,ءس$$

$$= ٢\left[٤س - \frac{١}{٢}س^٢\right]_{٠}^{٤}$$

$$= ٢ \times (٨) = ١٦$$

(٦) ∵ د (س) = س٢ (٣ - ٢|س|) زوجية

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} س^٢ (٣ - ٢|س|)\,ءس$$

$$= ٢\int_{٠}^{٢} س^٢ (٣ - ٢س)\,ءس$$

$$= ٢\int_{٠}^{٢} (٣س^٢ - ٢س^٣)\,ءس$$

$$= ٢\left[س^٣ - \frac{١}{٢}س^٤\right]_{٠}^{٢} = ٢ \times ٠ = صفر$$

(٧) د (س) = (٢س٥ - ٣ جا $\frac{\pi}{٦}$ س) فردية

$$\therefore \int_{-٣}^{٣} د(س)\,ءس = صفر$$

(٨) ∵ د (س) = $\sqrt{س^٤ + س^٢}$ زوجية

$$\therefore \int_{-١}^{١} د(س)\,ءس = ٢\int_{٠}^{١} \sqrt{س^٤ + س^٢}\,ءس$$

$$= ٢\int_{٠}^{١} |س|\sqrt{س^٢ + ١}\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{١} ٢س\sqrt{س^٢ + ١}\,ءس$$

$$= \left[\frac{٢}{٣}(س^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{٢}{٣}\left[٢\sqrt{٢} - ١\right] = \frac{٤\sqrt{٢} - ٢}{٣}$$

(٩) د (س) = |جا س| دالة زوجية

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} د(س)\,ءس$$

$$= ٢\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} د(س)\,ءس = ٢\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا س\,ءس$$

$$- ٢\left[-جتا س\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$٢\left[٠ + ١\right] = ٢$$

---

(١٧)

(١) د (س) = س٢ دالة زوجية

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} س^٢\,ءس = \int_{٠}^{٢} س^٢\,ءس = \frac{٨}{٣}$$

(٢) $\int_{-٢}^{٢} س^٢\,ءس = ٢\int_{٠}^{٢} س^٢\,ءس = ٢ \times \frac{٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$

(٣) $\int_{٠}^{٢} -س^٢\,ءس = -\int_{٠}^{٢} س^٢\,ءس = -\frac{٨}{٣}$

---

(١٨)

د (س) = س٣ دالة فردية

(١) $\int_{-٢}^{٠} س^٣\,ءس = -\int_{٠}^{٢} س^٣\,ءس = -٤$

(٢) $\int_{-٢}^{٢} س^٣\,ءس = صفر$

(٣) $\int_{٠}^{٢} ٣س^٣\,ءس = ٣\int_{٠}^{٢} س^٣\,ءس$

$$= ٣ \times ٤ = ١٢$$

---

(١٩)

(١) $\int_{٠}^{٤} [د(س) - ٢]\,ءس$

$$= \int_{٠}^{٤} د(س)\,ءس - \int_{٠}^{٤} ٢\,ءس$$

$$= ٣ - [٢س]_{٠}^{٤} = ٣ - (٨ - ٠) = -٥$$

(٢) $\int_{-٤}^{٤} د(س)\,ءس = صفر$

(٣) $\int_{-٤}^{٤} د(س)\,ءس = ٢\int_{٠}^{٤} د(س)\,ءس$

$$= ٢ \times ٣ = ٦$$

---

(٢٠)

$$\int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = \int_{٣}^{٢} د(س)\,ءس$$

$$+ \int_{٢}^{٥} د(س)\,ءس$$

$$= صفر + ٩ = ٩$$

٤١

∵ $\int_{-1}^{4} د(س)\,ءس = ٢$ ، $\int_{-1}^{٢} د(س)\,ءس = ٢٠$

∴ $\int_{-1}^{٢} د(س)\,ءس = ١٠$

∴ $\int_{١}^{٢} د(س)\,ءس - \int_{-1}^{١} د(س)\,ءس$

$+ \int_{٢}^{٤} د(س)\,ءس$

$= ١٠ + ٦ = ١٦$

٤٢

① $\int_{٠}^{٢} س(س^٢ - ٣)^٢\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int_{٠}^{٢} ٢س(س^٢ - ٣)^٢\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٣}(س^٢ - ٣)^٣\right]_{٠}^{٢} = \frac{١}{٦}(١ - (-٢٧))$

$= \frac{١٤}{٣}$

② $\int_{٠}^{٣} س\sqrt{٢٥ - س^٢}\,ءس$

$\frac{١}{٢}\int_{٠}^{٣} -٢س\sqrt{٢٥ - س^٢}\,ءس$

$\frac{١}{٢}\left[\frac{٢}{٣}(٢٥ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}[٦٤ - ١٢٥] = \frac{٦١}{٣}$

③ $\int_{٠}^{٢} س^٢\sqrt{س^٣ + ١}\,ءس$

$\frac{١}{٣}\int_{٠}^{٢} ٣س^٢\sqrt{س^٣ + ١}\,ءس$

$\frac{١}{٣}\left[\frac{٢}{٣} \times (س^٣ + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$

$\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣}(٩^{\frac{٣}{٢}} - ١) = \frac{١}{٩}(٩\sqrt{٩} - ١)$

④ $\int_{٠}^{١} \frac{س}{\sqrt{٩ + س^٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int_{٠}^{١} ٢س(٩ + س^٢)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$\frac{١}{٢}\left[٢(٩ + س^٢)^{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{١}$

$\frac{١}{٢}[١٠ - ٦] = ٢$

⑤ $\int_{٠}^{٢} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt[٣]{س^٣ + ٣س^٢ + ١٦}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\int_{٠}^{٢} (٣س^٢ + ٦س)$

$(س^٣ + ٣س^٢ + ١٦)^{-\frac{١}{٣}}\,ءس$

$= \frac{١}{٣}\left[٢(س^٣ + ٣س^٢ + ١٦)^{\frac{٢}{٣}}\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٢}{٣}[٦ - ٤] = \frac{٤}{٣}$

⑥ $\int_{١}^{٠} س(س + ٤)^٢\,ءس$

$= \int_{-4}^{٠} (س + ٤ - ٤)(س + ٤)^٢\,ءس$

$= \int_{-4}^{٠} (س + ٤)^٣ - ٤(س + ٤)^٢\,ءس$

$= \left[\frac{١}{٥}(س + ٤)^٥ - (س + ٤)^٣\right]_{-4}^{٠}$

$= \frac{-٢٥٦}{٥}$

⑦ $\int_{٠}^{٨} \frac{س}{\sqrt{س + ١}}\,ءس = \int_{٠}^{٨} س(س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$\int_{٠}^{٨} (س + ١ - ١)(س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$\int_{٠}^{٨} (س + ١)^{\frac{١}{٢}} - (س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$\left[\frac{٢}{٣}(س + ١)^{\frac{٣}{٢}} - ٢(س + ١)^{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٨}$

$١٢ - \frac{٤}{٣} = \frac{٤٠}{٣}$

⑧ $\int_{٣}^{٠} ص\sqrt{١ + ص}\,ءص$

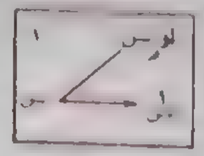
$\int_{٣}^{٠} (ص + ١ - ١)(ص + ١)^{\frac{١}{٢}}\,ءص$

$\int_{٣}^{٠} (ص + ١)^{\frac{٣}{٢}} - (ص + ١)^{\frac{١}{٢}}\,ءص$

$\left[\frac{٢}{٥}(ص + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣}(ص + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٣}^{٠}$

$\frac{-٩}{٢٨} - \frac{-٣٢}{٢٨} = \frac{٦}{٧}$

⑨ $\int_{١}^{هـ} (لو_{هـ} س)\,ءس$



$= [س\,لو_{هـ} س]_{١}^{هـ}$

$\int_{١}^{هـ} س \times \frac{١}{س}\,ءس$

$= [س\,لو_{هـ} س]_{١}^{هـ} - [س]_{١}^{هـ}$

$= هـ - (هـ - ١) = ١$

٤٣

① (أ)	② (جـ)	③ (د)	④ (أ)	⑤ (د)
⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (جـ)
⑪ (ب)	⑫ (جـ)	⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)
⑯ (ب)	⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)		

٤٤

① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (د)	⑤ (جـ)
⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (د)	⑨ (جـ)	⑩ (جـ)
⑪ (أ)	⑫ (جـ)	⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)

إرشادات لحل رقم ٤٤

① بوضع $ق = ٢س$ ∴ $ءق = ٢ءس$

، عند $س = ٦$ فإن $ق = ١٢$

، عند $س = ١٢$ فإن $ق = ٢٤$

∵ $\int_{٦}^{١٢} د(٢س)\,ءس = \int_{١٢}^{٢٤} \frac{١}{٢} د(ق)\,ءق = ١٠$

∴ $\int_{١٢}^{٢٤} د(ق)\,ءق = ٢٠$

② بوضع $س^٢ = ص$ ∴ $٢س\,ءس = ءص$

، عند $س = ٢$ ∴ $ص = ٤$

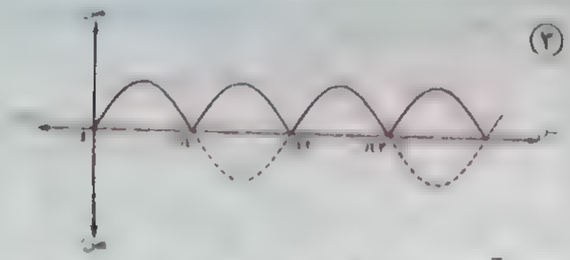
، عند $س = ٣$ فإن $ص = ٩$

∴ $\int_{٢}^{٣} ٢س\,ق(س^٢)\,ءس = \int_{٤}^{٩} ق(ص)\,ءص = \left[\frac{١}{٢}[ق(ص)]^٢\right]_{٤}^{٩}$

$\frac{١}{٢}(ق(٩))^٢ - \frac{١}{٢}(ق(٤))^٢$

$\frac{١}{٢} \times (٧)^٢ - \frac{١}{٢} \times (٣)^٢ = ٢٠$

③



∵ $\int_{٠}^{\pi} جاس\,ءس = [-جتاس]_{٠}^{\pi} = -جتا\pi + جتا صفر$

$= ٢$

∴ $\int_{٠}^{٢\pi} |جاس|\,ءس = ٢٠ \times \int_{٠}^{\pi} جاس\,ءس$

$= ٢٠ \times ٢ = ٤٠$

④ ∵ $\int_{جا\theta}^{جا\theta} \frac{س^٢}{٢}\,ءس = \frac{\sqrt{٢}}{٨}$

∴ $\left[\frac{س^٣}{٦}\right]_{جا\theta}^{جا\theta} = \frac{\sqrt{٢}}{٨}$

∴ $جتا^٣\theta - جا^٣\theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ $جتا٣\theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ∴ $٣\theta = ١٥٠°$

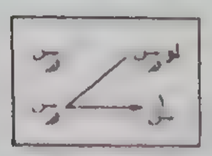
∴ $\theta = ٥٠°$

⑤ $\int_{١}^{هـ} هـ^س\left(\frac{١ + س\,لو_{هـ} س}{س}\right)ءس$

$\int_{١}^{هـ} هـ^س\left(\frac{١}{س} + لو_{هـ} س\right)ءس$

$\int_{١}^{هـ} هـ^س \times \frac{١}{س}\,ءس$

$+ \int_{١}^{هـ} هـ^س\,لو_{هـ} س\,ءس$

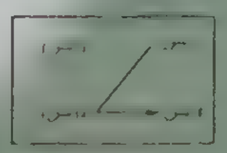


$\int_{١}^{هـ} هـ^س \times \frac{١}{س}\,ءس + [هـ^س\,لو_{هـ} س]_{١}^{هـ}$

$\int_{١}^{هـ} هـ^س \times \frac{١}{س}\,ءس$

$هـ^هـ\,لو_{هـ} هـ - هـ^١\,لو_{هـ} ١ - هـ^هـ$

⑥ $\int_{١}^{٥} س\,د(س)\,ءس$



$[س\,د(س)]_{١}^{٥}$

$\int_{١}^{٥} د(س)\,ءس$

$[٥\,د(٥) - د(١)] - ٧$

$٥ \times ٩ - ٣ - ٧ = ٣٥$

⑦ ∵ د (س) = س لو$_{هـ}$ س

∴ دَ(س) = س × $\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س = ١ + لو$_{هـ}$ س

∴ $\int_{١}^{هـ}$ دَ(س) ء س = [د(س)]$_{١}^{هـ}$

= دَ(هـ) − دَ(١)

= لو$_{هـ}$ هـ + ١ − لو$_{هـ}$ ١ − ١

= ١

⑧ ∵ $\int_{٢}^{٥}$ $\frac{١}{س + ٢}$ ء س = [لو$_{هـ}$ |س + ٢|]$_{٢}^{٥}$

لو$_{هـ}$ ٧ − لو$_{هـ}$ ٤ = لو$_{هـ}$ $\frac{٧}{٤}$

وبالمثل نجد أن

$\int_{-١}^{٣}$ $\frac{١}{س + ٤}$ ء س = $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{١}{س + ٥}$ ء س

= $\int_{٣}^{٦}$ $\frac{١}{س + ١}$ ء س = لو$_{هـ}$ $\frac{٧}{٤}$

⑨ $\int_{٢}^{ب}$ |س − ٢| ء س

= $\int_{٢}^{٢}$ (٢ − س) ء س + $\int_{٢}^{ب}$ (س − ٢) ء س

= [٢س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{١}^{٢}$ + [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٢س]$_{٢}^{ب}$

= ٢ − (٢أ − $\frac{١}{٢}$ أ^{٢}) + ($\frac{١}{٢}$ ب^{٢} − ٢ب) + ٢

∴ ٤ − ٢أ − ٢ب − $\frac{١}{٢}$ أ^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ب^{٢} = ٤

∴ $\frac{١}{٢}$ (أ^{٢} + ب^{٢}) = ٢ (أ + ب)

∴ $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{أ + ب}$ = ٤

⑩ $\int_{٠}^{٢}$ (س + ٦)^{٢} هـ$^{س^{٢}}$ ء س

− $\int_{٠}^{٢}$ (س − ٦)^{٢} هـ$^{س^{٢}}$ ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ((س + ٦)^{٢} − (س − ٦)^{٢}) هـ$^{س^{٢}}$ ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢٤ س هـ$^{س^{٢}}$ ء س

= ١٢ $\int_{٠}^{٢}$ ٢ س هـ$^{س^{٢}}$ ء س = ١٢ [هـ$^{س^{٢}}$]$_{٠}^{٢}$

= ١٢ [هـ^{٤} − ١]

⑪ $\int_{٠}^{٢}$ [د(س)]^{٢} دَ(س) ء س = [$\frac{١}{٣}$ [د(س)]^{٣}]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{١}{٣}$ [(د(٢))^{٣} − (د(٠))^{٣}]

= $\frac{١}{٣}$ (صفر − (٤)^{٣}) = $\frac{-٦٤}{٣}$

⑫ $\int_{٠}^{٢}$ دَ(س) ء س = [د(س)]$_{٠}^{٢}$ = د(٢) − د(٠)

= صفر − ٤ = −٤

⑬ ∵ ميل المماس ل = $\frac{٢ - ٤}{١ - ٠}$ = −٢

∴ دَ(١) = −٢

$\int_{-٣}^{١}$ دَ(س) ء س = [دَ(س)]$_{-٣}^{١}$

= دَ(١) − دَ(−٣) = −٢ − صفر = −٢

⑭ ∵ ميل ل$_{١}$ = ظا ٤٥° = ١ ∴ دَ(٣) = ١

، ∵ ميل ل$_{٢}$ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ دَ(−٤) = $\frac{٣}{٢}$

∴ $\int_{-٤}^{٣}$ $\frac{دَ(س)}{د(س)}$ ء س

= [لو$_{هـ}$ |د(س)|]$_{-٤}^{٣}$

= لو$_{هـ}$ |د(٣)| − لو$_{هـ}$ |د(−٤)|

= لو$_{هـ}$ ١ − لو$_{هـ}$ $\frac{٣}{٢}$ = لو$_{هـ}$ $\frac{٢}{٣}$

⑮ ∵ ميل المماس ل = $\frac{٣ + ٢}{٣ - ٠}$ = $\frac{٥}{٣}$

∴ دَ(٣) = $\frac{٥}{٣}$

$\int_{٠}^{٣}$ س دَ(س) ء س

= [س دَ(س) − د(س)]$_{٠}^{٣}$

= [٣ دَ(٣) − د(٣)]

− [صفر − د(٠)]

− [٣ × $\frac{٥}{٣}$ − ٣] + ٢ = ٤

تفاضل	تكامل
س	د(س)
١	د(س)
صفر	د(س)

اجابات تمارين 18

(أ)

① $\int_{-١}^{٤}$ (٢س + ٣) ء س = [س^{٢} + ٣س]$_{-١}^{٤}$

= (١٦ + ١٢) − (١ − ٣) = ٣٠ وحدة مربعة.

② ص = |س − ٣| يقع فوق محور السينات

فى الفترة [٢ ، ٥]

∴ المساحة = $\int_{٢}^{٥}$ |س − ٣| ء س

= $\int_{٢}^{٣}$ (−س + ٣) ء س

+ $\int_{٣}^{٥}$ (س − ٣) ء س

= [−$\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣س]$_{٢}^{٣}$

+ [$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٣س]$_{٣}^{٥}$

= ٢,٥ وحدة مربعة.

③ ص = ٣س^{٢} يقع فوق محور السينات

فى الفترة [−٣ ، ١]

∴ المساحة = $\int_{-٣}^{١}$ ٣س^{٢} ء س

= [س^{٣}]$_{-٣}^{١}$ = ١ − (−٢٧) = ٢٨

(ب)

① $\int_{٠}^{٣}$ (١ + $\frac{١}{٢}$ س) ء س = [س + $\frac{١}{٤}$ س^{٢}]$_{٠}^{٣}$

= $\frac{٢١}{٤}$ وحدة مربعة.

② $\int_{٢}^{٤}$ س ء س = [$\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{٢}^{٤}$ = ٦ وحدة مربعة.

③ $\int_{١}^{٢}$ س^{٢} ء س = [$\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{١}^{٢}$ = ٣ وحدة مربعة.

④ $\int_{-١}^{٢}$ (س^{٢} − ٢س) ء س

+ |$\int_{٠}^{٢}$ (س^{٢} − ٢س) ء س|

= [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢}]$_{٠}^{٢}$ + |[$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢}]$_{٠}^{٢}$|

= $\frac{٤}{٣}$ + $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة.

⑤ $\int_{٠}^{٢}$ (٤ − س^{٢}) ء س + |$\int_{٢}^{٣}$ (٤ − س^{٢}) ء س|

= [٤س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٢}$

+ |[٤س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٢}^{٣}$|

= $\frac{١٦}{٣}$ + $\frac{٧}{٣}$ = $\frac{٢٣}{٣}$ وحدة مربعة.

⑥ $\int_{-٢}^{١}$ (١ − س^{٣}) ء س = [س − $\frac{١}{٤}$ س^{٤}]$_{-٢}^{١}$

= $\frac{٣١}{٤}$ وحدة مربعة.

⑦ $\int_{١}^{٣}$ $\frac{٢}{س}$ ء س = [٢ لو$_{هـ}$ |س|]$_{١}^{٣}$

= ٢ (لو$_{هـ}$ ٣ − ٢ لو$_{هـ}$ ١)

= ٢ لو$_{هـ}$ ٣ وحدة مربعة.

⑧ $\int_{-٢}^{١}$ (٤ − س^{٢}) ء س − $\int_{-٢}^{١}$ (س + ٢) ء س

= $\int_{-٢}^{١}$ (٤ − س^{٢} − س − ٢) ء س

= $\int_{-٢}^{١}$ (٢ − س^{٢} − س) ء س

= [٢س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{-٢}^{١}$

= $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة.

⑨ $\int_{-٢}^{٢}$ (٤ − س^{٢}) ء س − $\int_{-٢}^{٢}$ (٢ − $\frac{س^{٢}}{٢}$) ء س

= $\int_{-٢}^{٢}$ (٢ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}) ء س

= [(٢س − $\frac{١}{٦}$ س^{٣})]$_{-٢}^{٢}$ = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة.

⑩ $\int_{-٤}^{٥}$ ٢ $\sqrt{س + ٤}$ ء س

= [٢ × $\frac{٢}{٣}$ (س + ٤)$^{\frac{٣}{٢}}$]$_{-٤}^{٥}$

= $\frac{٤}{٣}$ × ٢٧ = ٣٦ وحدة مربعة.

⑪ |$\int_{\frac{١}{هـ}}^{١}$ ($\frac{لو_{هـ} س}{س}$) ء س| + $\int_{١}^{هـ}$ $\frac{لو_{هـ} س}{س}$ ء س

= |[$\frac{١}{٢}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٢}]$_{\frac{١}{هـ}}^{١}$| + [$\frac{١}{٢}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٢}]$_{١}^{هـ}$

= |$\frac{١}{٢}$ (صفر − (−١)^{٢})| + $\frac{١}{٢}$ (١^{٢} − صفر^{٢})

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١ وحدة مربعة

(١٢) $\left|\int_{0}^{1} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ})\,\text{ء س}\right| + \int_{1}^{2} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ})\,\text{ء س}$

$= \left|\left[\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ س}\right]_{0}^{1}\right| + \left[\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ س}\right]_{1}^{2}$

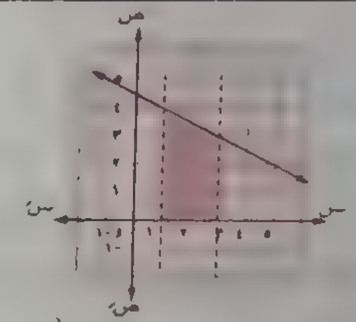
$= |\text{٠} - \text{١}| + \left((\text{هـ}^{2} - 2\,\text{هـ}) - (\text{هـ} - \text{هـ})\right)$

$= \text{١} + \text{هـ}^{2} - 2\,\text{هـ} = \text{هـ}^{2} - 2\,\text{هـ} + \text{١}$

$= (\text{هـ} - \text{١})^{2}$ وحدة مربعة.

---

(١)



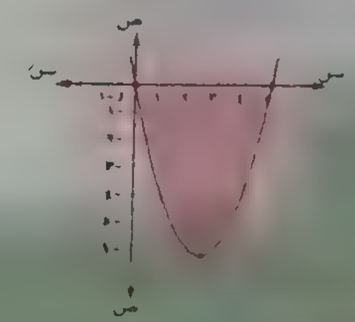
$\text{س} + 2\,\text{ص} = \text{٩}$ ∴ $\text{ص} = \frac{-1}{2}\,\text{س} + \frac{9}{2}$

∴ المساحة $= \int_{1}^{3} \left(\frac{-1}{2}\,\text{س} + \frac{9}{2}\right)\text{ء س}$

$= \left[\frac{-1}{4}\,\text{س}^{2} + \frac{9}{2}\,\text{س}\right]_{1}^{3}$

= ٧ وحدة مربعة.

(٢)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

$\text{س}^{2} - 6\,\text{س} = \text{٠}$ ∴ $\text{س} = \text{٠}$ ، $\text{س} = 5$

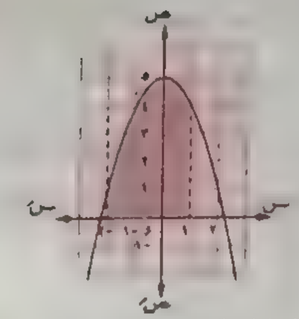
∵ المنحنى يقع تحت محور السينات في الفترة $[\text{٠} ، 5]$

∴ المساحة $= \left|\int_{0}^{5} (\text{س}^{2} - 6\,\text{س})\,\text{ء س}\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{3}\,\text{س}^{3} - 3\,\text{س}^{2}\right]_{0}^{5}\right|$

$\frac{125}{6}$ ٢٠ وحدة مربعة.

(٣)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

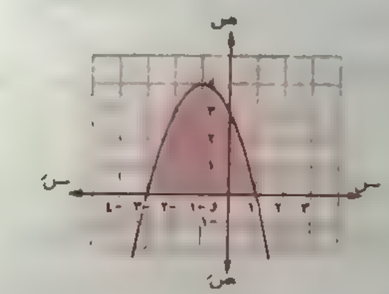
$5 - \text{س}^{2} = \text{٠}$ ∴ $\text{س} = \pm\sqrt{5}$

∴ المساحة $= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5 - \text{س}^{2})\,\text{ء س}$

$= \left[5\,\text{س} - \frac{1}{3}\,\text{س}^{3}\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}$

= ١٢ وحدة مربعة.

(٤)



* نقط التقاطع مع محور السينات

$3 - 2\,\text{س} - \text{س}^{2} = \text{٠}$

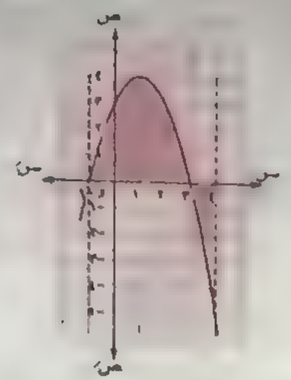
∴ $\text{س} = -3$ ، $\text{س} = \text{١}$

∴ المساحة $= \int_{-3}^{1} (3 - 2\,\text{س} - \text{س}^{2})\,\text{ء س}$

$= \left[3\,\text{س} - \text{س}^{2} - \frac{1}{3}\,\text{س}^{3}\right]_{-3}^{1}$

$\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

(٥)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$3\,\text{س} + 2\,\text{س} - \text{س}^{2} = \text{٠}$

∴ $\text{س} = -\text{١}$ ، $\text{س} = 3$

∴ المساحة $= \int_{-1}^{3} (3 + 2\,\text{س} - \text{س}^{2})\,\text{ء س}$

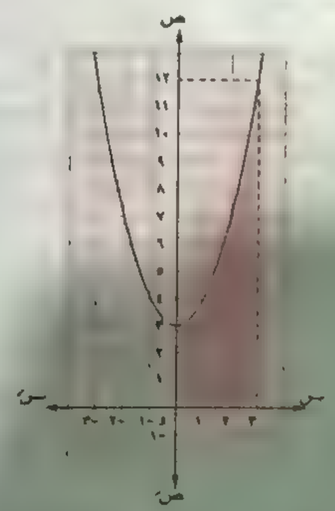
$+ \left|\int_{3}^{4} (3 + 2\,\text{س} - \text{س}^{2})\,\text{ء س}\right|$

$= \left[3\,\text{س} + \text{س}^{2} - \frac{1}{3}\,\text{س}^{3}\right]_{-1}^{3}$

$+ \left|\left[3\,\text{س} + \text{س}^{2} - \frac{1}{3}\,\text{س}^{3}\right]_{3}^{4}\right|$

$= \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \text{١٣}$ وحدة مربعة.

(٦)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$\text{س}^{2} + 3 = \text{٠}$

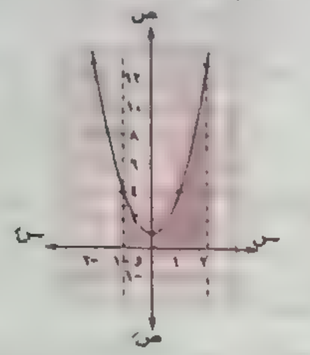
∴ المعادلة ليس لها حل في ح

∴ المنحنى لايقطع محور السينات

∴ المساحة $= \int_{\text{صفر}}^{3} (\text{س}^{2} + 3)\,\text{ء س}$

$= \left[\frac{1}{3}\,\text{س}^{3} + 3\,\text{س}\right]_{0}^{3} = \text{١٨}$ وحدة مربعة.

(٧)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$3\,\text{س}^{2} + \text{١} = \text{٠}$

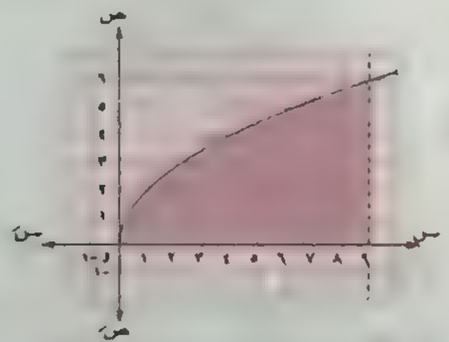
∴ المعادلة ليس لها حل في ح

∴ المنحنى لايقطع محور السينات

∴ المساحة $= \int_{-3}^{3} (3\,\text{س}^{2} + \text{١})\,\text{ء س}$

$= \left[\text{س}^{3} + \text{س}\right]_{-3}^{3} = \text{١٢}$ وحدة مربعة.

(٨)



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

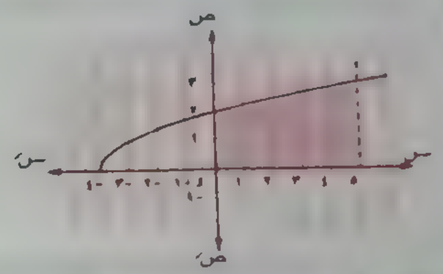
نضع $\sqrt{4\,\text{س}} = \text{٠}$ ∴ $\text{س} = \text{٠}$

∴ المساحة $= \int_{0}^{9} \sqrt{4\,\text{س}}\,\text{ء س}$

$= 2 \int_{0}^{9} \text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{ء س}$

$= 2\left[\frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{9} = \text{٣٦}$ وحدة مربعة.

⑨



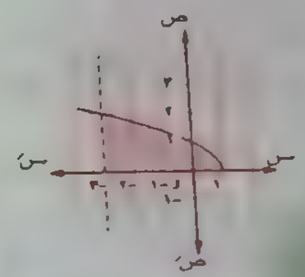
* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$\sqrt{\text{س} + ٤} = ٠$ ∴ س = −٤

∴ المساحة = $\int_{٠}^{٥} \sqrt{\text{س} + ٤}\ \text{ء س}$

= $\left[\frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٥}$ = $\frac{٣٨}{٣}$ وحدة مربعة.

⑩



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$\sqrt{١ - \text{س}} = ٠$ ∴ س = ١

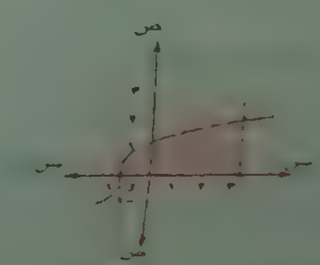
∴ المساحة = $\int_{-٣}^{١} \sqrt{١ - \text{س}}\ \text{ء س}$

= $\left[\frac{(١ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times -١}\right]_{-٣}^{١}$

= $\left[\frac{-٢}{٣}(١ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-٣}^{١}$

= $\frac{١}{٣}$ ٥ وحدة مربعة.

⑪



* نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات نضع

$\sqrt{٢\text{س} + ٢} = ٠$ ∴ س = −١

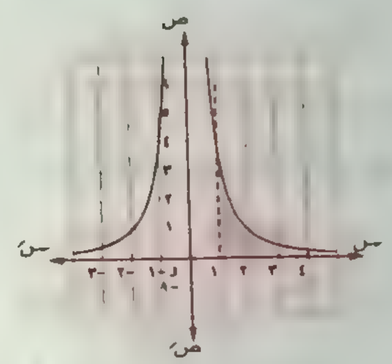
∴ المساحة = $\int_{-١}^{٣} \sqrt{٢\text{س} + ٢}\ \text{ء س}$

= $\left[\frac{(٢\text{س} + ٢)^{\frac{٣}{٢}}}{٢ \times \frac{٣}{٢}}\right]_{-١}^{٣}$

= $\left[\frac{٢}{٨}(٢\text{س} + ٢)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-١}^{٣}$

= ٦ وحدة مربعة.

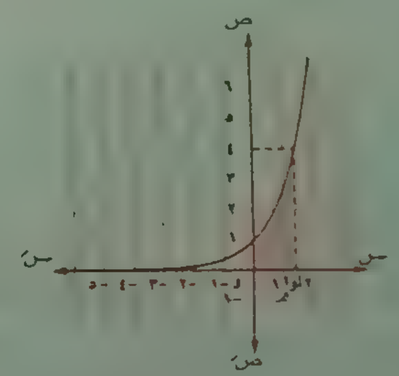
⑫



المساحة = $\int_{١}^{٤} \frac{٤}{\text{س}^{٢}}\ \text{ء س}$ = $\int_{١}^{٤} ٤\ \text{س}^{-٢}\ \text{ء س}$

= $\left[-٤\ \text{س}^{-١}\right]_{١}^{٤}$ = ٣ وحدة مربعة.

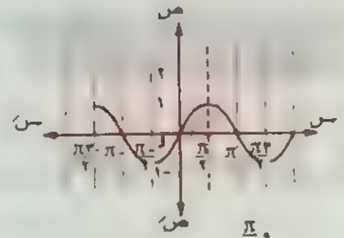
⑬



∴ المساحة = $\int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ء س}$ = $\left[\text{هـ}^{\text{س}}\right]_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤}$

= ٤ − ١ = ٣ وحدة مربعة.

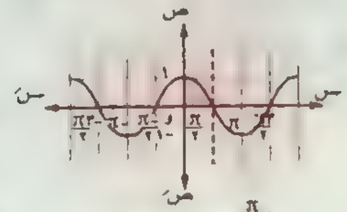
⑭



المساحة = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا س ء س = $\left[-\text{جتا س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= ١ وحدة مربعة.

⑮



المساحة = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا س ء س = $\left[\text{جا س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

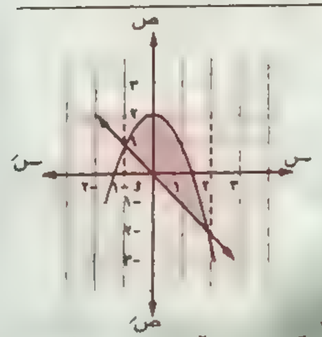
= ١ وحدة مربعة.

٤

① ص = ٢ − س^{٢} ، س + ص = ٠

بحل المعادلتين

∴ س = ٢ أ، س = −١



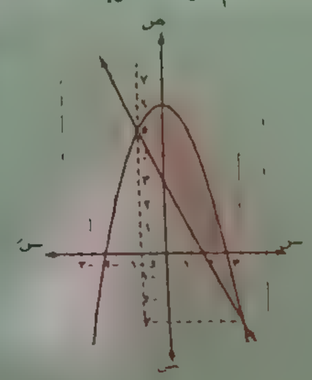
∴ المساحة = $\int_{-١}^{٢} \left[(٢ - \text{س}^{٢}) - (-\text{س})\right]\ \text{ء س}$

= $\int_{-١}^{٢} (٢ - \text{س}^{٢} + \text{س})\ \text{ء س}$

= $\left[٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{-١}^{٢}$

= $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة.

②



ص + س^{٢} = ٦ منها ص = −س^{٢} + ٦ (١)

، ص + ٢ س − ٣ = ٠

منها ص = −٢ س + ٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ٣ ، س = −١

∴ المساحة = $\int_{-١}^{٣} (-\text{س}^{٢} + ٦)$

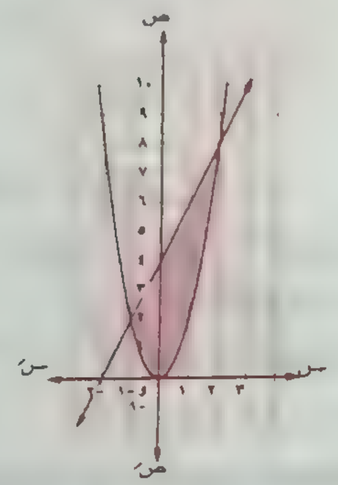
− (−٢ س + ٣) ء س

= $\int_{-١}^{٣} (-\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣)\ \text{ء س}$

= $\left[-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٣\text{س}\right]_{-١}^{٣}$

= $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

③



د (س) = ٢ س^{٢} ، ر (س) = ٢ س + ٤

بحل المعادلتين :

∴ س = ٢ ، س = −١

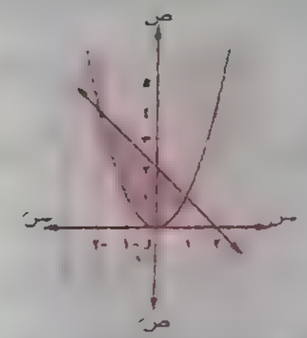
∴ المساحة = $\int_{-١}^{٢} \left((٢\text{س} + ٤) - (٢\text{س}^{٢})\right)\ \text{ء س}$

= $\int_{-١}^{٢} (-٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)\ \text{ء س}$

= $\left[-\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٤\text{س}\right]_{-١}^{٢}$

= ٩ وحدة مربعة.

④



* نقط التقاطع بحل المعادلتين

∴ س = -٢ ، س = ١

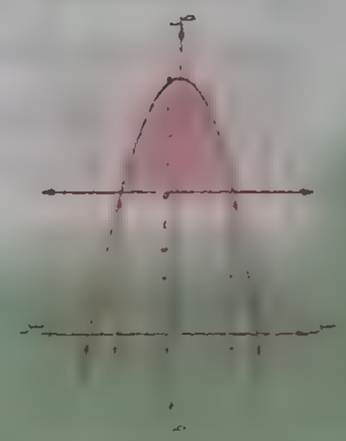
∴ المساحة = $\int_{-٢}^{١}$ (٢ - س) - (س^{٢}) ء س

= $\int_{-٢}^{١}$ (٢ - س - س^{٢}) ء س

= [٢ س - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} - $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{-٢}^{١}$

= $\frac{١}{٢}$ ٤ وحدة مربعة.

⑤



[illegible]

ص = [illegible] س^{٢} ، ص

∴ [illegible] س = ٢ ، ٢

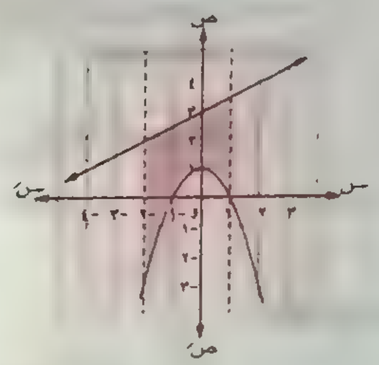
∴ المساحة = $\int$ [illegible] ء س

$\int$ [illegible] ء س

[illegible]

[illegible] وحدة مربعة

⑥



بحل المعادلتين : ص = - س^{٢} + ١

، ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

∴ - س^{٢} + ١ = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

∴ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س + ٢ = ٠

∴ ٢ س^{٢} + س + ٤ = ٠

∴ المعادلة ليس لها حل في ح

∴ المنحنيين غير متقاطعين

، ∵ المنحنى الثاني أعلى المنحنى الأول

∴ المساحة المطلوبة

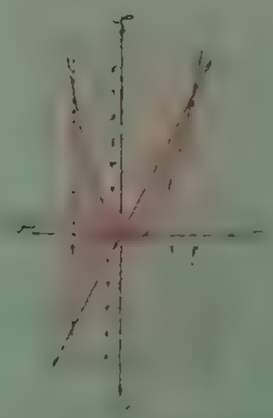
= $\int_{-٢}^{١}$ ($\frac{١}{٢}$ س + ٣) - (- س^{٢} + ١) ء س

= $\int_{-٢}^{١}$ ($\frac{١}{٢}$ س + ٢ + س^{٢}) ء س

= [$\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٢ س + $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{-٢}^{١}$

= $\frac{٣٣}{٤}$ وحدة مربعة.

⑦



∴ المساحة = $\int_{-٢}^{٠}$ ((س^{٢} - س) - (٢ س)) ء س

+ $\int_{٠}^{٣}$ ((٢ س) - (س^{٢} - س)) ء س

= $\int_{-٢}^{٠}$ (س^{٢} - ٣ س) ء س

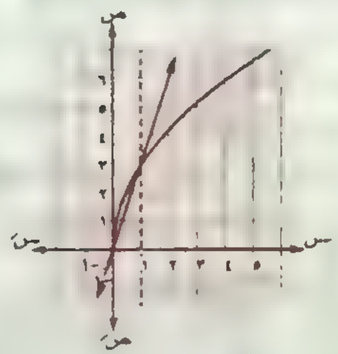
+ $\int_{٠}^{٣}$ (٣ س - س^{٢}) ء س

= [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}]$_{-٢}^{٠}$

+ [$\frac{٣}{٢}$ س^{٢} - $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٣}$

= $\frac{٢٦}{٣}$ + $\frac{٩}{٢}$ = ١٣ $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة.

⑧ بحل المعادلتين ∴ س = ٠ ، ١

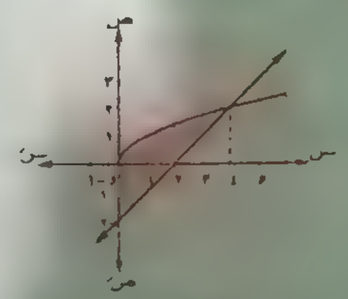


المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (٢ $\sqrt{س}$ - ٣ س) ء س

= [٢ (س)$^{\frac{٣}{٢}}$ - $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}]$_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

⑨

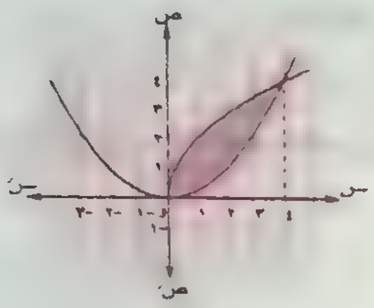


المساحة = $\int_{صفر}^{٤}$ ($\sqrt{س}$ - (س - ٢)) ء س

[$\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢ س]$_{صفر}^{٤}$

٥ $\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

⑩ بحل المعادلتين ∴ س = ٠ ، ٤

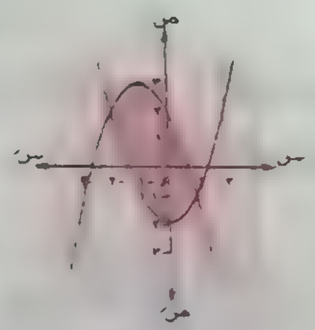


المساحة = $\int_{٠}^{٤}$ (٢ $\sqrt{س}$ - $\frac{١}{٤}$ س^{٢}) ء س

= [$\frac{٤}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ - $\frac{١}{١٢}$ س^{٣}]$_{٠}^{٤}$

= $\frac{١٦}{٣}$ = ٥ $\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

⑪ بحل المعادلتين ∴ س = -٢ ، ١



∴ المساحة =

$\int_{-٢}^{١}$ (٣ - (س + ١)^{٢} - (س^{٢} - ٢)) ء س

= $\int_{-٢}^{١}$ (٣ - (س + ١)^{٢} - س^{٢} + ٢) ء س

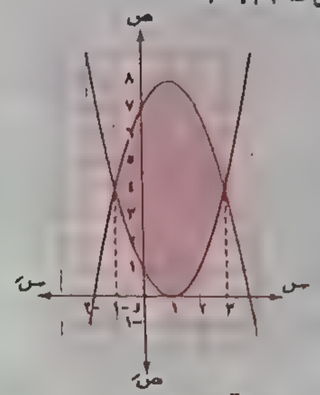
= $\int_{-٢}^{١}$ (٥ - (س + ١)^{٢} - س^{٢}) ء س

= [٥ س - $\frac{١}{٣}$ (س + ١)^{٣} - $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{-٢}^{١}$

= ٩ وحدة مربعة.

(١٢) بحل المعادلتين :

∴ س = ٣ أ، −١



المساحة = $\int_{-١}^{٣} ((٧ + ٢س - س^٢)$

$- (س - ١)^٢) ء س$

$= \int_{-١}^{٣} ((٧ + ٢س - س^٢)$

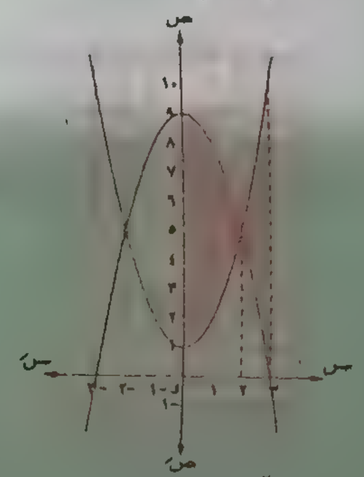
$- (س^٢ - ٢س + ١)) ء س$

$= \int_{-١}^{٣} (-٢س^٢ + ٤س + ٦) ء س$

$= \left[\frac{-٢}{٣} س^٣ + ٢س^٢ + ٦س\right]_{-١}^{٣}$

$= \frac{٦٤}{٣} = ٢١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

(١٣)



المساحة = $\int_{٠}^{٢} (٩ - س^٢) - (س^٢ + ١) ء س$

$+ \int_{٢}^{٣} (س^٢ + ١) - (٩ - س^٢) ء س$

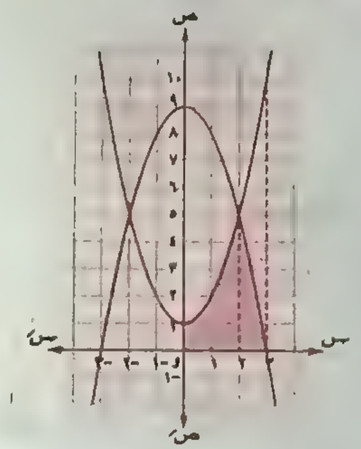
$= \int_{٠}^{٣} (-٢س^٢ + ٨) ء س$

$+ \int_{٢}^{٣} (٢س^٢ - ٨) ء س$

$= \left[-\frac{٢}{٣} س^٣ + ٨س\right]_{٠}^{٣} + \left[\frac{٢}{٣} س^٣ - ٨س\right]_{٢}^{٣}$

$= \frac{٣٢}{٣} + \frac{١٤}{٣} = \frac{٤٦}{٣} = ١٥\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

(١٤)



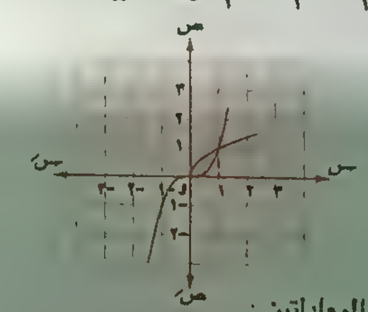
المساحة المطلوبة

$= \int_{٠}^{٢} (س^٢ + ١) ء س + \int_{٢}^{٣} (٩ - س^٢) ء س$

$= \left[\frac{١}{٣} س^٣ + س\right]_{٠}^{٢} + \left[٩س - \frac{١}{٣} س^٣\right]_{٢}^{٣}$

$= \frac{١٤}{٣} + \frac{٨}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة.

(١٥)



بحل المعادلتين :

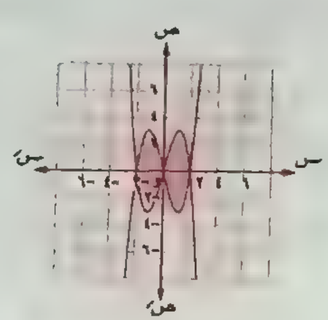
∴ س = ٠ ، ١

∴ المساحة = $\int_{٠}^{١} (\sqrt{س} - س^٢) ء س$

$= \left[\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٤} س^٤\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{٥}{١٢}$ وحدة مربعة.

(١٦)



لحل المعادلتين معًا نضع

$س^٣ - ٤س = ٤س - س^٣$

∴ $٢(س^٣ - ٤س) = ٠$

∴ $٢س(س^٢ - ٤) = ٠$

∴ $٢س(س + ٢)(س - ٢) = ٠$

∴ س = ٠ أ، س = ٢ أ، س = −٢

المساحة = $\int_{-٢}^{٠} [(س^٣ - ٤س)$

$- (٤س - س^٣)] ء س$

$+ \int_{٠}^{٢} [(٤س - س^٣)$

$- (س^٣ - ٤س)] ء س$

$= \int_{-٢}^{٠} (٢س^٣ - ٨س) ء س$

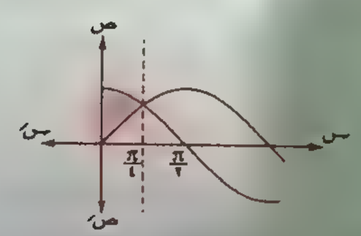
$+ \int_{٠}^{٢} (-٢س^٣ + ٨س) ء س$

$= \left[\frac{١}{٢} س^٤ - ٤س^٢\right]_{-٢}^{٠}$

$+ \left[\frac{-١}{٢} س^٤ + ٤س^٢\right]_{٠}^{٢}$

$= ٨ + ٨ = ١٦$ وحدة مربعة.

(١٧)



لحل المعادلتين معًا نضع

جاس = جتاس ∴ ظاس = ١

∴ $س = \frac{\pi}{٤} + \pi ن$ ∴ س = ٤٥° أ، ...

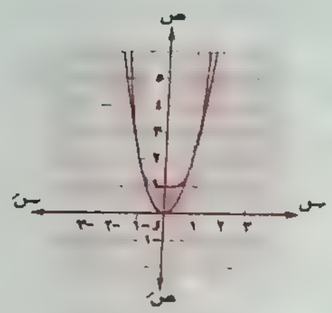
المساحة = $\int_{صفر}^{\frac{\pi}{٤}} (جتاس - جاس) ء س$

$= \left[(جاس + جتاس)\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) - (٠ + ١)$

$= \sqrt{٢} - ١$ وحدة مربعة.

(١٨)



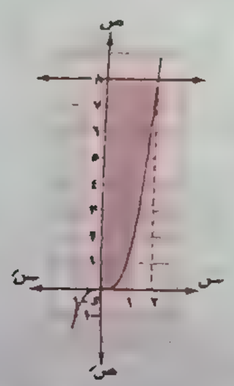
بحل المعادلتين : ∴ س = ± ١

∴ المساحة = $\int_{-١}^{١} (س^٤ + ١) - (٢س^٢) ء س$

$= \int_{-١}^{١} (س^٤ - ٢س^٢ + ١) ء س$

$= \left[\frac{١}{٥} س^٥ - \frac{٢}{٣} س^٣ + س\right]_{-١}^{١} = \frac{١٦}{١٥}$

(١٩)



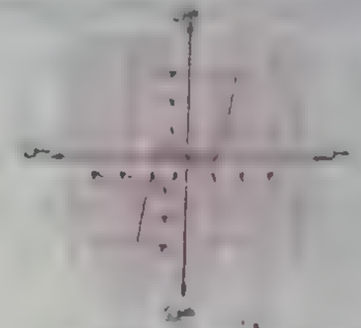
* نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم نحل المعادلتين

$س^٣ = ٨$ ∴ س = ٢

∴ المساحة = $\int_{٠}^{٢} (٨ - س^٣) ء س$

$= \left[٨س - \frac{١}{٤} س^٤\right]_{٠}^{٢} = ١٢$

(٢)



المساحة = $\int_{-1}^{1} (\text{س}^2 - \text{س})\,\text{ءس}$

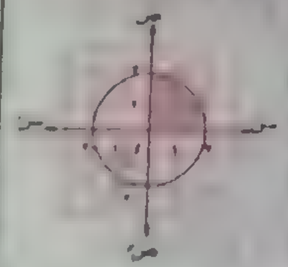
$+ \left| \int_{1}^{1} (\text{س}^2 - \text{س})\,\text{ءس} \right|$

$= \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{1}{2}\text{س}^2 \right]_{-1}^{1}$

$+ \left| \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{1}{2}\text{س}^2 \right]_{1}^{1} \right|$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

(١) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - \text{س}^2}\,\text{ءس}$



∴ $\text{ص} = \sqrt{4 - \text{س}^2}$

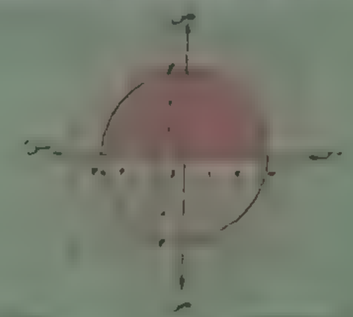
∴ $\text{ص}^2 = 4 - \text{س}^2$

∴ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢

∴ المساحة = $\frac{1}{2}(\pi(2)^2) = \pi$ وحدة مربعة.

(٢)



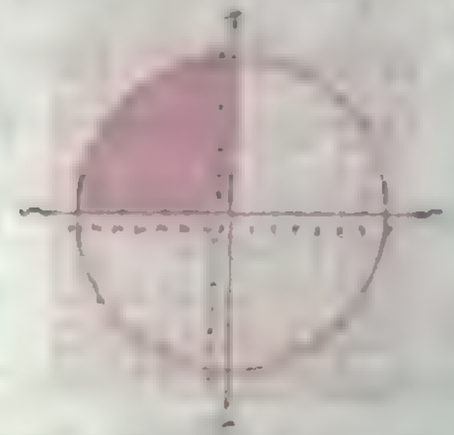
$\int_{-3}^{3} 9 - \text{س}^2\,\text{ءس}$ ∴ $\text{ص} = \sqrt{9 - \text{س}^2}$

منها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات

∴ المساحة = $\frac{1}{2}(\pi(3)^2) = \frac{9}{2}\pi$ وحدة مربعة

(٣)



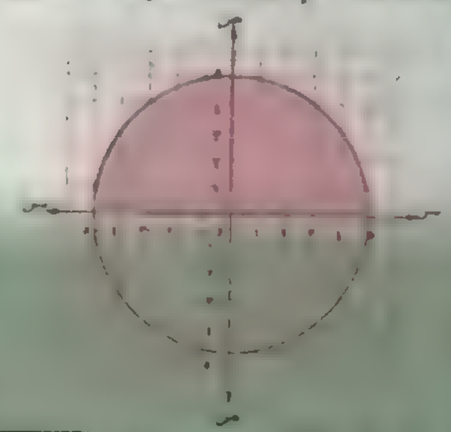
$\int_{-7}^{7} \sqrt{49 - \text{س}^2}\,\text{ءس}$ ∴ $\text{ص} = \sqrt{49 - \text{س}^2}$

منها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 49$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٧ وحدات

∴ المساحة = $\frac{1}{2}(\pi(7)^2) = \frac{49}{2}\pi$ وحدة مربعة

(٤)



$\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - \text{س}^2}\,\text{ءس}$ ∴ $\text{ص} = \sqrt{25 - \text{س}^2}$

منها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات

∴ المساحة = $\frac{1}{2}(\pi(5)^2) = \frac{25}{2}\pi$ وحدة مربعة.

(٥)

$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - \text{س}^2}\,\text{ءس}$

ص = $\sqrt{4 - \text{س}^2}$ منها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢

∴ المساحة المطلوبة عبارة عن

Δ ب و حـ + القطاع و ا ب

∵ حـ و = $\frac{1}{2}$ و ب ∴ ق (∠ حـ ب و) = ٣٠°

ومنها ق (∠ ا و ب) = ٣٠°

∴ المساحة المطلوبة

= $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع + $\frac{1}{2}$ نق^2 × ق$^\circ$

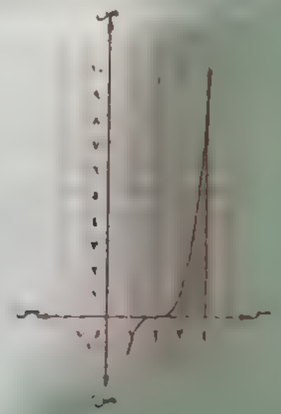
= $\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} + \frac{1}{2}(2)^2 \times \frac{\pi}{6}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ وحدة مساحة.

(٦)

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (جـ)
(٩) (ب)	(١٠) (جـ)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)	(١٦) (ب)
(١٧) (جـ)			

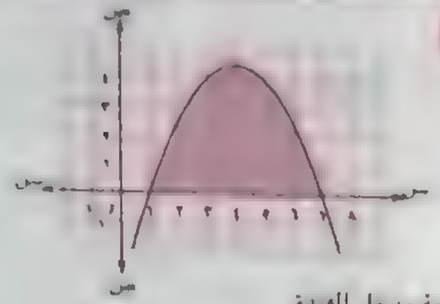
(٧)



المساحة = $\int_{0}^{1} (\text{س} - 2)^2\,\text{ءس}$

$\left[\frac{1}{3}(\text{س} - 2)^3\right]_{0}^{1} = 4$ وحدات مربعة.

(٨)



مساحة مدخل الفندق

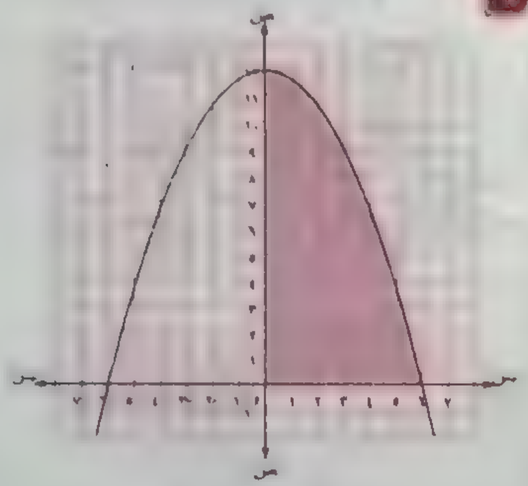
= $\int_{1}^{7} \frac{1}{2}(\text{س} - 1)(\text{س} - 7)\,\text{ءس}$

= $\frac{1}{2}\int_{1}^{7} (\text{س}^2 - 8\text{س} + 7)\,\text{ءس}$

= $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 7\text{س}\right]_{1}^{7} = 18$ متر مربع

∴ تكلفة المدخل = ١٨ × ١٥٠٠ = ٢٧٠٠٠ جنيهًا.

(٩)



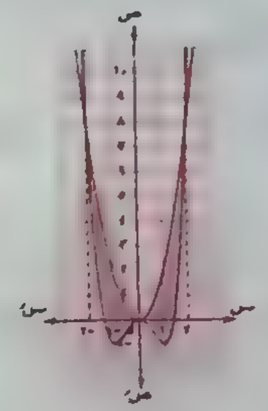
مساحة الممر الواحد = $\int_{0}^{6} \left(12 - \frac{1}{4}\text{س}^2\right)\text{ءس}$

= $\left[12\text{س} - \frac{1}{12}\text{س}^3\right]_{0}^{6} = 48$ متر مربع

∴ تكلفة الخمس ممرات = ٥ × ٤٠٠ × ٤٨

= ٩٦٠٠٠ جنيهًا.

١١



المساحة = $\int_{-٢}^{٢}$ ٢ س^{٢} − (س^{٤} − ٢ س^{٢}) ء س

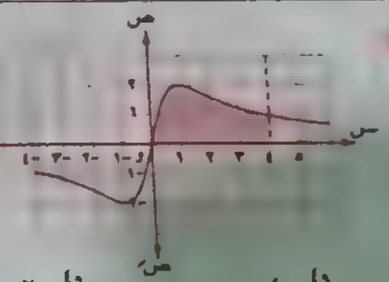
= $\int_{-٢}^{٢}$ (− س^{٤} + ٤ س^{٢}) ء س

= $\left[-\frac{١}{٥}\text{ س}^{٥} + \frac{٤}{٣}\text{ س}^{٣}\right]_{-٢}^{٢}$ = $\frac{١٢٨}{١٥}$ ديسم^{٢}

∴ المساحة اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج

١٠٠٠ ملصق = ١٠٠٠ × $\frac{١٢٨}{١٥}$ = $\frac{٢٥٦٠٠}{٣}$ ديسم^{٢}

١٢

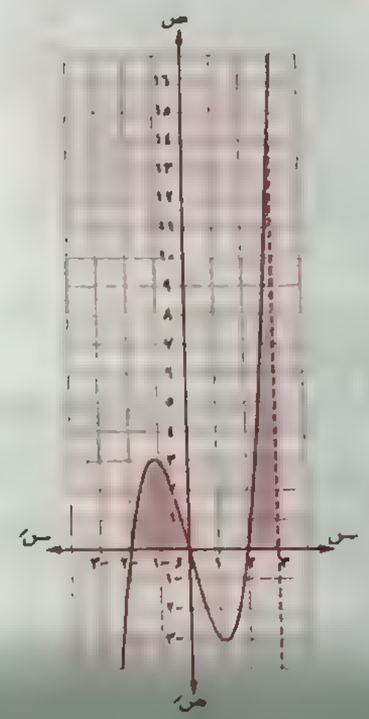


المساحة = $\int_{٠}^{٤}$ $\frac{٤\text{ س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ ء س = ٢ $\int_{٠}^{٤}$ $\frac{٢\text{ س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ ء س

= ٢ [لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ١)]$_{٠}^{٤}$

= ٢ لو$_{هـ}$ ١٧ وحدة مربعة.

١٣



المساحة = $\int_{-٢}^{٠}$ (س^{٣} − ٤ س) ء س

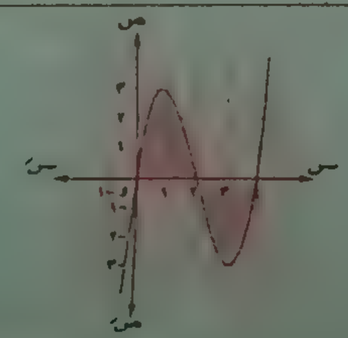
+ $\int_{٠}^{٣}$ (س^{٣} − ٤ س) ء س

= $\left[\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} - ٢\text{ س}^{٢}\right]_{-٢}^{٠}$

+ $\left[\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} - ٢\text{ س}^{٢}\right]_{٠}^{٣}$

= ٤ + $\frac{٢٥}{٤}$ = $\frac{٤١}{٤}$ = ١٠ $\frac{١}{٤}$ وحدة مربعة.

١٤



المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٨ س) ء س

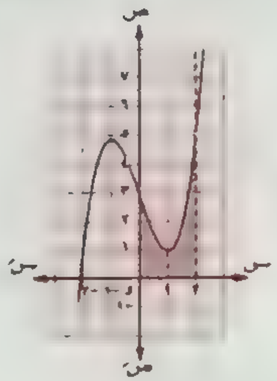
+ $\left|\int_{٢}^{٤}\right.$ (س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٨ س) ء س$\left.\right|$

= $\left[\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} - ٢\text{ س}^{٢} + ٤\text{ س}^{٢}\right]_{٠}^{٢}$

+ $\left|\left[\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} - ٢\text{ س}^{٢} + ٤\text{ س}^{٢}\right]_{٢}^{٤}\right|$

= ٤ + ٤ = ٨ وحدة مربعة.

١٤



د (س) = س^{٣} − ٣ س + ٣

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٣

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ١ ، − ١

، د (٠) = ٣ ، د (١) = ١ ، د (٢) = ٥

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ١

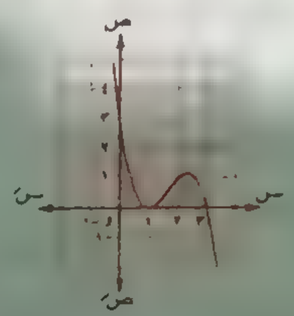
، القيمة العظمى المطلقة = ٥

المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{٢}$ س^{٣} − ٣ س + ٣ ء س

= $\left[\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} - \frac{٣}{٢}\text{ س}^{٢} + ٣\text{ س}\right]_{٠}^{٢}$

= ٤ وحدة مربعة.

١٥



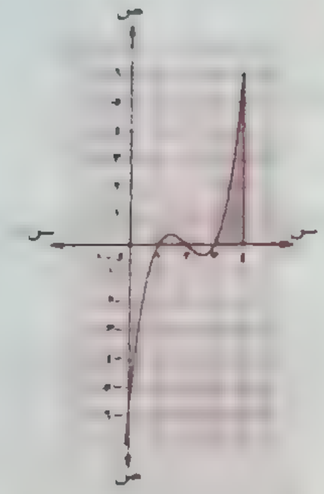
المساحة = $\int_{٠}^{٣}$ (٣ − س) (س − ١)^{٢} ء س

= $\int_{٠}^{٣}$ (− س^{٣} + ٥ س^{٢} − ٧ س + ٣) ء س

= $\left[-\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} + \frac{٥}{٣}\text{ س}^{٣} - \frac{٧}{٢}\text{ س}^{٢} + ٣\text{ س}\right]_{٠}^{٣}$

− $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

١٦



المساحة = $\int_{١}^{٢}$ (س − ١) (س − ٢) (س − ٣) ء س

+ $\int_{٢}^{٣}$ (س − ١) (س − ٢) (س − ٣) ء س

= $\int_{١}^{٢}$ (س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١١ س − ٦) ء س

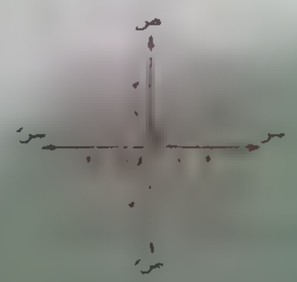
+ $\int_{٢}^{٣}$ (س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١١ س − ٦) ء س

= $\left[\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} - ٢\text{ س}^{٣} + \frac{١١}{٢}\text{ س}^{٢} - ٦\text{ س}\right]_{١}^{٢}$

+ $\left[\frac{١}{٤}\text{ س}^{٤} - ٢\text{ س}^{٣} + \frac{١١}{٢}\text{ س}^{٢} - ٦\text{ س}\right]_{٢}^{٣}$

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{٥}{٢}$ = ٢ $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

١٧



$\overline{\text{أس}}$ ⊥ $\overline{\text{أص}}$ ، ∴ $\overline{\text{أص}}$ = − $\overline{\text{أس}}$

∴ ص = − ٢ $\overline{\text{أس}}$ + س

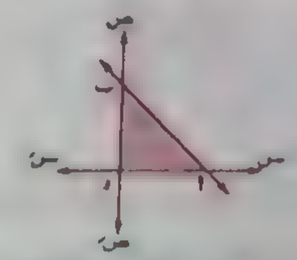
، س = ٠ ، ص = ٠

∴ المساحة = $\int_{٠}^{١} (١ - ٢ س^{\frac{١}{٢}} + س) ء س$

= $\left[س - \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{٢}\right]_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة.

٢٢



أى مثلث طول قاعدته أ وارتفاعه ب مساحته تساوى مساحة المثلث القائم الذى طول ضلعى القائمة فيه أ ، ب على الترتيب يمكن حساب مساحته بإيجاد المساحة اسفل المستقيم الذى معادلته $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ ص = $\frac{-ب}{أ}$ س + ب

∴ المساحة = $\int_{٠}^{أ} \left(\frac{-ب}{أ} س + ب\right) ء س$

= $\left[\frac{-ب}{٢أ} س^{٢} + ب س\right]_{٠}^{أ}$

= $\frac{-ب}{٢أ} \times أ^{٢} + ب أ = -\frac{١}{٢} أ ب + أ ب$

= $\frac{١}{٢}$ أ ب

٢٣

المساحة = $\int_{-٢}^{١} (س^{٢} - ٣ س^{٢} + ٥) - (س + ٢) ء س$

+ $\int_{١}^{٢} (س + ٢) - (س^{٢} - ٣ س^{٢} + ٥) ء س$

= $\int_{-٢}^{١} (س^{٣} - ٣ س^{٢} - س + ٣) ء س$

+ $\int_{١}^{٢} (-س^{٣} + ٣ س^{٢} + س - ٣) ء س$

= $\left[\frac{١}{٤} س^{٤} - س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٣ س\right]_{-٢}^{١}$

+ $\left[-\frac{١}{٤} س^{٤} + س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} - ٣ س\right]_{١}^{٢}$

= ٤ + ٤ = ٨ وحدة مربعة.

٢٤

المساحة المطلوبة

= $\int_{-٦}^{٠} (س + ٦) - (\frac{١}{٢} س) ء س$

+ $\int_{٠}^{٢} (س + ٦) - س^{٢} ء س$

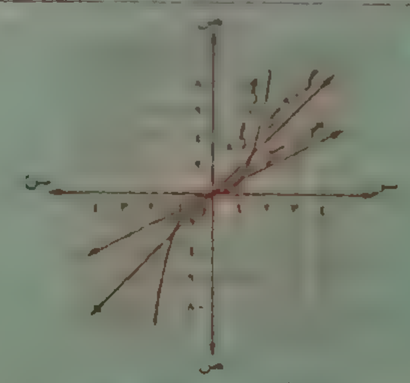
= $\int_{-٦}^{٠} (\frac{٣}{٢} س + ٦) ء س$ + $\int_{٠}^{٢} (-س^{٢} + س + ٦) ء س$

= $\left[\frac{٣}{٤} س^{٢} + ٦ س\right]_{-٦}^{٠}$

+ $\left[-\frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} + ٦ س\right]_{٠}^{٢}$ = ١٢ + ١٠

= ٢٢ وحدة مربعة.

٢٥



المساحة = ٢ $\int_{٠}^{١} (٢ س - س) ء س$

+ $\int_{١}^{٢} (٢ س - س^{٢}) ء س$

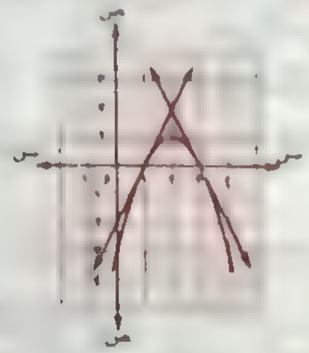
= ٢ $\int_{٠}^{١} س ء س$

+ $\int_{١}^{٢} (٢ س - س^{٢}) ء س$

= ٢ $\left(\left[\frac{١}{٢} س^{٢}\right]_{٠}^{١} + \left[س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣}\right]_{١}^{٢}\right)$

= ٢ $\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}\right) = \frac{٥}{٣}$ وحدة مربعة

٢٦



ص = − س^{٢} + ٤ س − ٣

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = −٢ س + ٤

∴ ميل المماس عند س = ١ هو ٢

∴ معادلته $\frac{ص - ٠}{س - ١}$ = ٢ منها ص = ٢ س − ٢

، ميل المماس عند س = ٣ هو −٢

∴ معادلته $\frac{ص - ٠}{س - ٣}$ = −٢ منها ص = −٢ س + ٦

∴ المساحة $\int_{١}^{٢} (٢ س - ٢)$

− (س^{٢} + ٤ س − ٣) ء س

+ $\int_{٢}^{٣} (-٢ س + ٦)$

(− س^{٢} + ٤ س − ٣) ء س

$\int_{١}^{٢} (س^{٢} - ٢ س + ١) ء س$

+ $\int_{٢}^{٣} (س^{٢} - ٦ س + ٩) ء س$

$\int_{١}^{٢} (س - ١)^{٢} ء س$

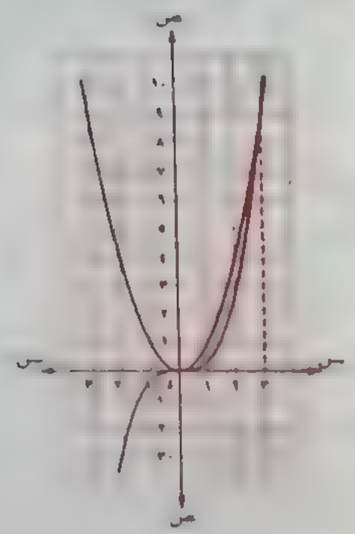
+ $\int_{٢}^{٣} (س - ٣)^{٢} ء س$

= $\left[\frac{١}{٣} (س - ١)^{٣}\right]_{١}^{٢}$

+ $\left[\frac{١}{٣} (س - ٣)^{٣}\right]_{٢}^{٣} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}$

= $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٢٧

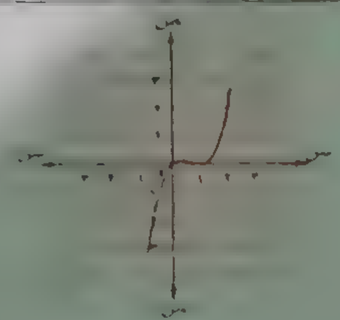


المساحة = $\int_{٠}^{٢} (س^{٢} - \frac{١}{٢} س^{٣}) ء س$

= $\left[\frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{١٢} س^{٤}\right]_{٠}^{٢}$

$\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

٢٨



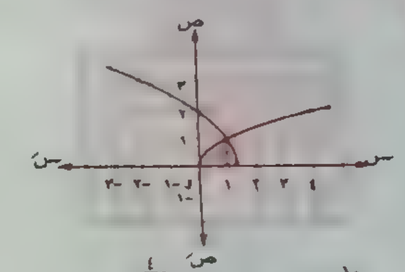
المساحة = $\int_{0}^{1}$ س (س − ١)^{٢} ءس

= $\int_{0}^{1}$ (س^{٣} − ٢ س^{٢} + س) ءس

= $\left[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{0}^{1}$

= $\frac{١}{١٢}$ وحدة مربعة.

٢



المساحة = $\int_{0}^{1}$ $\sqrt{\text{س}}$ ءس + $\int_{1}^{\frac{٤}{٣}}$ $\sqrt{٤ - ٣\text{س}}$ ءس

= $\left[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{0}^{1}$ + $\left[\frac{-٢}{٩}(٤ - ٣\text{س})^{\frac{٣}{٢}}\right]_{1}^{\frac{٤}{٣}}$

= $\frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٩} = \frac{٨}{٩}$ وحدة مربعة.

---

٢٦ ① (د) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د)

⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (أ) ⑧ (جـ)

إرشادات لحل رقم ٢٦

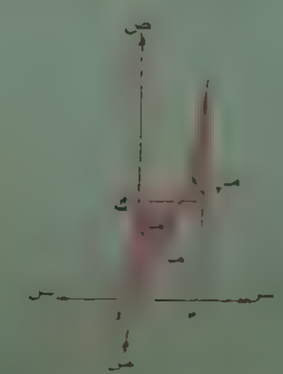
① ∵ $\int_{0}^{أ}$ د (س) ءس = $\int_{0}^{أ}$ س (س) ءس

أ > ٤ من هندسة الشكل أ > ٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤٠ + (أ − ٤) × ٤٠ = ٢٣٠ أ

∴ أ = ٨

②



∵ $\text{م}_{٢}$ = $\text{م}_{١}$ ∴ $\text{م}_{٢}$ + م = $\text{م}_{١}$ + م

∴ $\int_{0}^{2}$ (س^{٢} + ١) ءس = ٣ ك

∴ $\left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}\right]_{0}^{2}$ = ٣ ك

∴ ٣ ك = ١٢ ∴ ك = ٤

③ ∵ $\text{م}_{٢}$ = ٧ $\text{م}_{١}$

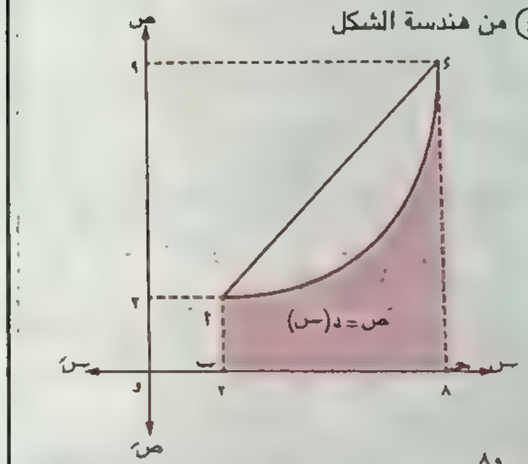
∴ $\int_{0}^{2}$ س^{٢} ءس = ٧ $\int_{0}^{ك}$ ٢ س^{٢} ءس

$\left[\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{0}^{2}$ = ٧ $\left[\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{0}^{ك}$

$\frac{١٦}{٣} - \frac{٢}{٣}$ ك^{٣} = ٧ × $\frac{٢}{٣}$ ك^{٣}

∴ ك^{٣} = ١ ∴ ك = ١

④ من هندسة الشكل



$\int_{2}^{8}$ د (س) ءس < مساحة شبة المنحرف أ ب جـ د

∴ $\int_{2}^{8}$ د (س) ءس < $\left(\frac{٢ + ٩}{٢} \times ٦\right)$

∴ $\int_{2}^{8}$ د (س) ءس < ٣٣ وحدة مربعة.

∴ $\int_{2}^{8}$ د (س) ءس لا يمكن أن يساوى ٣٤

⑤ ∵ س = ٦ ن ∴ س^{٢} = ٣٦ ن^{٢} (١)

، ∵ ص = ٣ ن^{٢} (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن س^{٢} = ١٢ ص

أى أن ص = $\frac{١}{١٢}$ س^{٢}

∴ المساحة = $\int_{0}^{12}$ ص ءس

= $\frac{١}{١٢}\int_{0}^{12}$ س^{٢} ءس = $\frac{١}{١٢}\left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{0}^{12}$

= $\frac{١}{٣٦}$ × (١٢)^{٣} = ٤٨ وحدة مربعة

حل آخر :

∵ المساحة = $\int_{0}^{12}$ ص ءس

، عند س = ٠ فإن ن = ٠

، عند س = ١٢ فإن ن = ٢

∴ المساحة = $\int_{0}^{2}$ ص $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ءن

= $\int_{0}^{2}$ (٣ ن^{٢} × ٦) ءن

= ١٨ $\int_{0}^{2}$ ن^{٢} ءن

= ١٨ × $\left[\frac{١}{٣}\text{ن}^{٣}\right]_{0}^{2}$ = ٤٨ وحدة مربعة

⑥ ∵ $\text{م}_{٢}$ = $\int_{0}^{4}$ $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ءس = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

∴ $\text{م}_{٢}$ = $\int_{0}^{4}$ (٢ $\sqrt{\text{س}}$ − $\frac{١}{٤}$ س^{٢}) ءس

= $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة.

، ∵ مساحة المربع = ٤ × ٤ = ١٦ وحدة مربعة.

∴ $\text{م}_{١}$ = ١٦ − ($\frac{١٦}{٣}$ + $\frac{١٦}{٣}$) = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة.

∴ $\text{م}_{١}$: $\text{م}_{٢}$ = $\frac{١٦}{٣}$: $\frac{١٦}{٣}$

= ١ : ١

⑦ لإيجاد نقط التقاط نضع جاس = جا ٢ س

∴ ٢ جاس جتاس − جاس = ٠

∴ جاس (٢ جتاس − ١) = ٠

∴ جاس = ٠ ومنها س = ٠ أ، س = π

أ، ٢ جتاس − ١ = ٠

∴ جتاس = $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{π}{٣}$

∴ $\text{م}_{٢}$ = $\int_{0}^{\frac{π}{٣}}$ (جا ٢ س − جاس) ءس

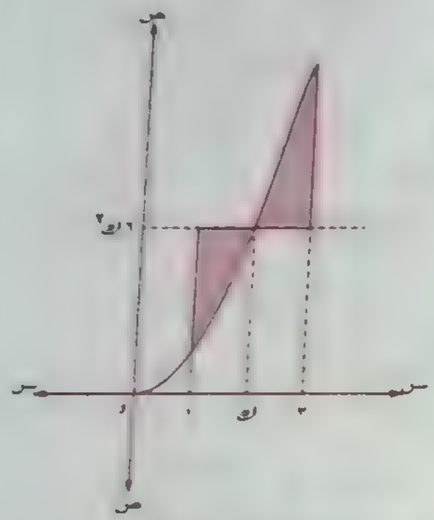
[½ جا ٢ س + جاس]

، $\text{م}_{٢}$ = $\int_{\frac{π}{٣}}^{π}$ (جاس − جا ٢ س) ءس

= [− جاس + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س]$_{\frac{π}{٣}}^{π}$ = $\frac{٩}{٤}$

∴ $\text{م}_{١}$: $\text{م}_{٢}$ = ١ : ٩

⑧



نفرض أن : د (ك) = ٦ ك^{٢}

∴ المساحة (م) = $\int_{0}^{ك}$ (٦ ك^{٢} − ٦ س^{٢}) ءس

+ $\int_{ك}^{2}$ (٦ س^{٢} − ٦ ك^{٢}) ءس

= [٦ ك^{٢} س − ٢ س^{٣}]$_{0}^{ك}$

+ [٢ س^{٣} − ٦ ك^{٢} س]$_{ك}^{2}$

= (٦ ك^{٣} − ٢ ك^{٣}) − (٦ ك^{٢} − ٢)

+ (٥٤ − ١٨ ك^{٢}) − (٢ ك^{٣} − ٦ ك^{٢})

= (٤ ك^{٣} − ٦ ك^{٢} + ٢) + (٥٤ − ١٨ ك^{٢} + ٤ ك^{٣})

٨ ك^{٣} − ٢٤ ك^{٢} + ٥٦

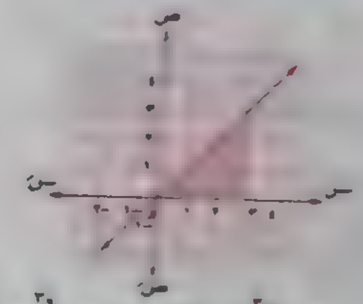
∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءك}}$ = ٢٤ ك^{٢} − ٤٨ ك

وبوضع $\frac{\text{ءم}}{\text{ءك}}$ = صفر ∴ ك = ٢

، $\left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءك}}\right)_{ك=٢}$ = (٢٤ × ٤ − ٤٨) = صفر

∴ عند ك = ٢ يكون مساحة صفر ← مستقيم

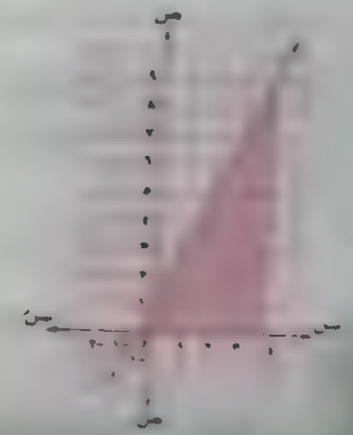
(١)



الحجم = $\pi \int_{٠}^{٣} (\text{ص})^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{٠}^{٣} \text{س}^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{٣} = ٩\pi$ وحدة حجوم.

(٢)



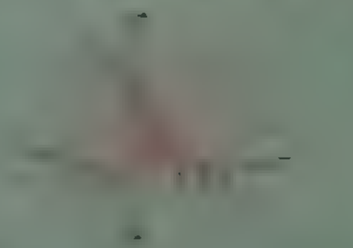
الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٢\text{س} + ١)^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٢}(٢\text{س} + ١)^{٣}\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٢٦}{٣}\pi$ وحدة حجوم.

(٣)



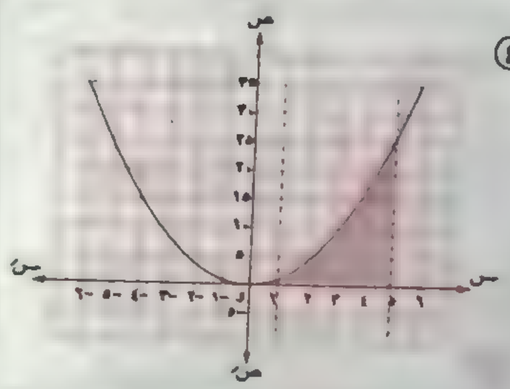
الحجم = $\pi \int_{٠}^{٣} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{٣} (٣ - \text{س})^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{-١}{٣}(٣ - \text{س})^{٣}\right]_{٠}^{٣}$

$= ٩\pi$ وحدة حجوم.

(٤)

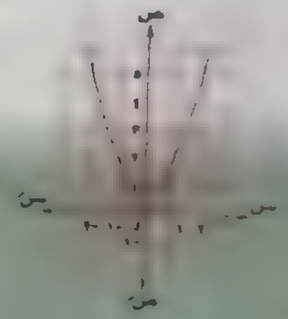


الحجم = $\pi \int_{١}^{٥} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{١}^{٥} (\text{س}^{٢})^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{١}^{٥} \text{س}^{٤}\, \text{ءس} = \pi \left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥}\right]_{١}^{٥}$

$= \frac{٤}{٥}\, ٦٢٤\pi$ وحدة حجوم.

(٥)



الحجم = $\pi \int_{-١}^{١} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس}$

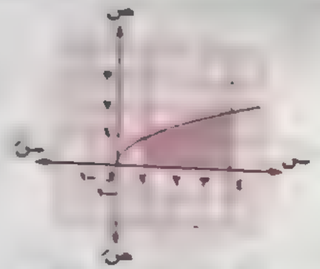
$= \pi \int_{-١}^{١} (\text{س}^{٢} + ١)^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{-١}^{١} (\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١)\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}\right]_{-١}^{١}$

$= \frac{٣٢}{١٥}\pi$ وحدة حجوم

(٦)

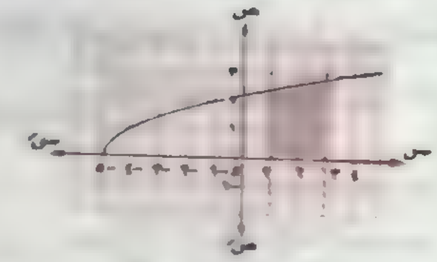


الحجم = $\pi \int_{١}^{٤} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{١}^{٤} (\sqrt{\text{س}})^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{١}^{٤} \text{س}\, \text{ءس} = \pi \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{١}^{٤}$

$= \frac{١}{٢}\, ٧\pi$ وحدة حجوم.

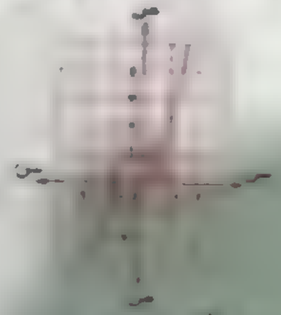
(٧)



الحجم = $\pi \int_{١}^{٦} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{١}^{٦} (\text{س} + ٥)\, \text{ءس}$

$= \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٥\text{س}\right]_{١}^{٦} = ١٤\pi$ وحدة حجوم.

(٨)



الحجم = $\pi \int_{-١}^{١} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس}$

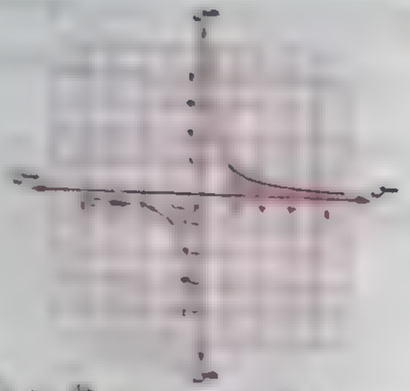
$= \pi \int_{-١}^{١} (\text{س}^{٢} + ١)^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{-١}^{١} (\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١)\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}\right]_{-١}^{١}$

$= \frac{٣٢}{١٥}\pi$ وحدة حجوم

(٩)

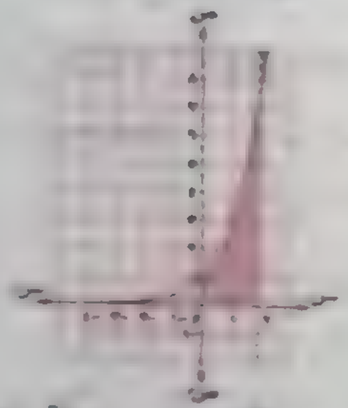


الحجم = $\pi \int_{١}^{٤} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{١}^{٤} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{١}^{٤} \text{س}^{-٢}\, \text{ءس} = \pi \times \left[-\text{س}^{-١}\right]_{١}^{٤}$

$= \frac{٣}{٤}\pi$ وحدة حجوم.

(١٠)

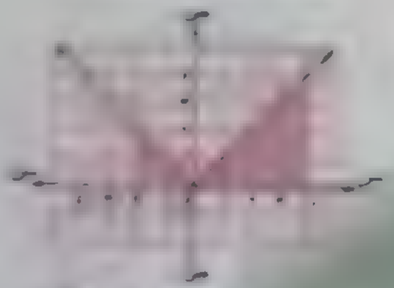


الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{٠}^{٢} \text{ه}^{٢\text{س}}\, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{\text{ه}^{٢\text{س}}}{٢}\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٢}\pi\left(\text{ه}^{٤} - ١\right)$ وحدة حجوم

(١١)



ص = $\begin{cases} \text{س} & \text{، س} \geq ٠ \\ -\text{س} & \text{، س} < \text{صفر} \end{cases}$

الحجم = $\pi \int_{-2}^{0} (-\text{س})^2 \, \text{ءس} + \pi \int_{0}^{4} \text{س}^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{-2}^{0} \text{س}^2 \, \text{ءس} + \pi \int_{0}^{4} \text{س}^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{3} \text{س}^3\right]_{-2}^{0} + \pi \left[\frac{1}{3} \text{س}^3\right]_{0}^{4}$

$= \frac{8}{3} \pi + \frac{64}{3} \pi = 24 \pi$ وحدة حجوم.

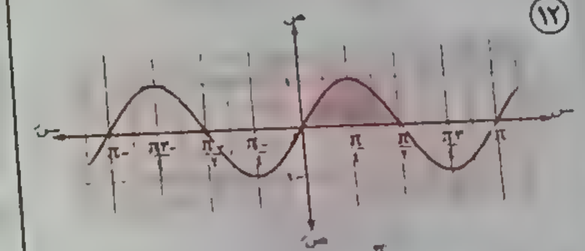
حل آخر :

الحجم = $\pi \int_{-2}^{4} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{-2}^{4} (|\text{س}|)^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{-2}^{4} \text{س}^2 \, \text{ءس} = \pi \left[\frac{1}{3} \text{س}^3\right]_{-2}^{4}$

$= 24 \pi$ وحدة حجوم.

(١٢)



الحجم = $\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ص}^2 \, \text{ءس}$

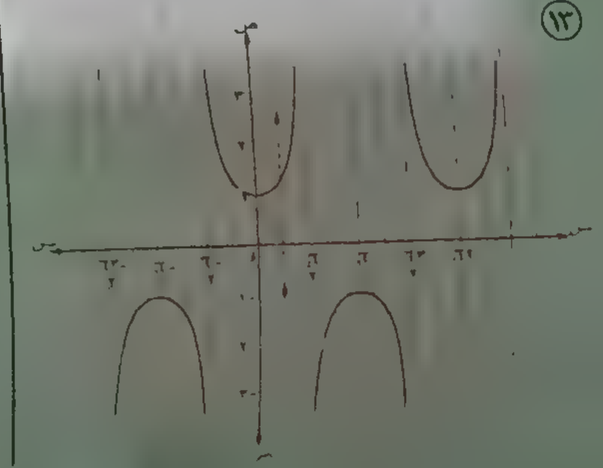
$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^2 \, 2\text{س} \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{جتا} \, 4\text{س}\right) \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{2} \text{س} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \text{جا} \, 4\text{س}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{4} \pi^2$ وحدة حجوم.

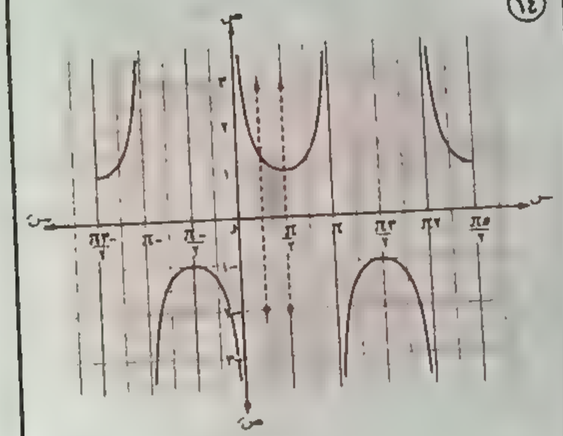
(١٣)



الحجم = $\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ظا}^2 \text{س} \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\text{ظا س}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$ وحدة حجوم.

(١٤)



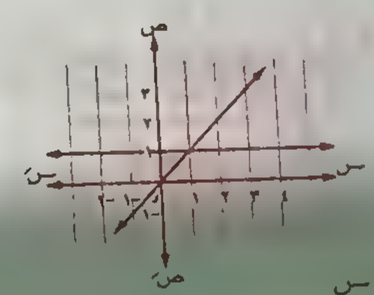
الحجم = $\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ص}^2 \, \text{ءس}$

$= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{قتا}^2 \text{س} \, \text{ءس}$

$= \pi \left[-\text{ظتا س}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$ وحدة حجوم.

٢

(١)



ص = س

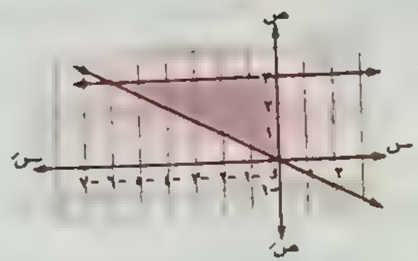
∴ س = ص

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{1} \text{س}^2 \, \text{ءص}$

$\pi \int_{0}^{1} \text{ص}^2 \, \text{ءص} = \pi \left[\frac{1}{3} \text{ص}^3\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{3} \pi$ وحدة حجوم.

(٢)



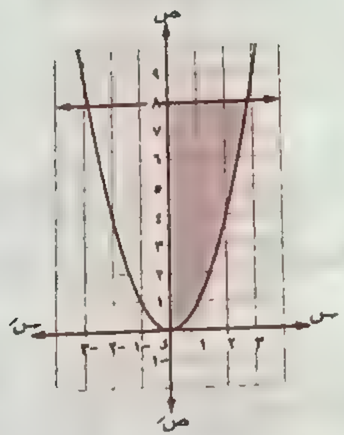
س + ٢ ص = ٠ ∴ س = −٢ ص

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{3} \text{س}^2 \, \text{ءص}$

$= \pi \int_{0}^{3} 4 \text{ص}^2 \, \text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{4}{3} \text{ص}^3\right]_{0}^{3} = 36 \pi$ وحدة حجوم.

(٣)

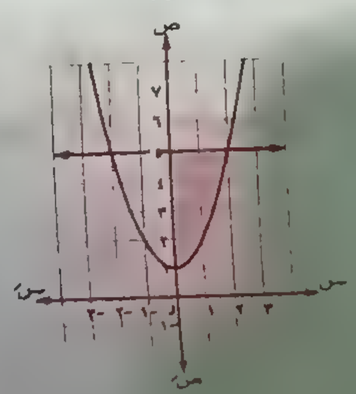


ط = س^2 يقطع الصادات فى صفر

الحجم = $\pi \int_{0}^{8} \text{س}^2 \, \text{ءص} = \pi \int_{0}^{8} \text{ص} \, \text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{1}{2} \text{ص}^2\right]_{0}^{8} = 32 \pi$ وحدة حجوم.

(٤)



ص = س^2 + ١

∴ س^2 = ص − ١ يقطع الصادات فى ١

∴ الحجم = $\pi \int_{1}^{9} \text{س}^2 \, \text{ءص}$

$= \pi \int_{1}^{9} (\text{ص} - 1) \, \text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{1}{2} (\text{ص} - 1)^2\right]_{1}^{9}$

$= 8 \pi$ وحدة حجوم.

(٥)

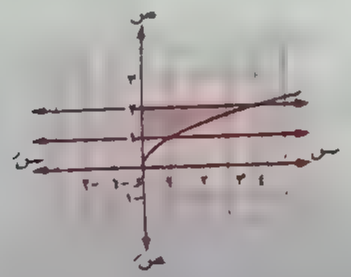
ص = س^2

∴ س = ص$^{\frac{1}{2}}$ (يقطع الصادات فى صفر)

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{8} \text{س}^2 \, \text{ءص} = \pi \int_{0}^{8} \text{ص}^{\frac{2}{3}} \, \text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{3}{5} \text{ص}^{\frac{5}{3}}\right]_{0}^{8} = \frac{96}{5} \pi$ وحدة حجوم.

(٦)

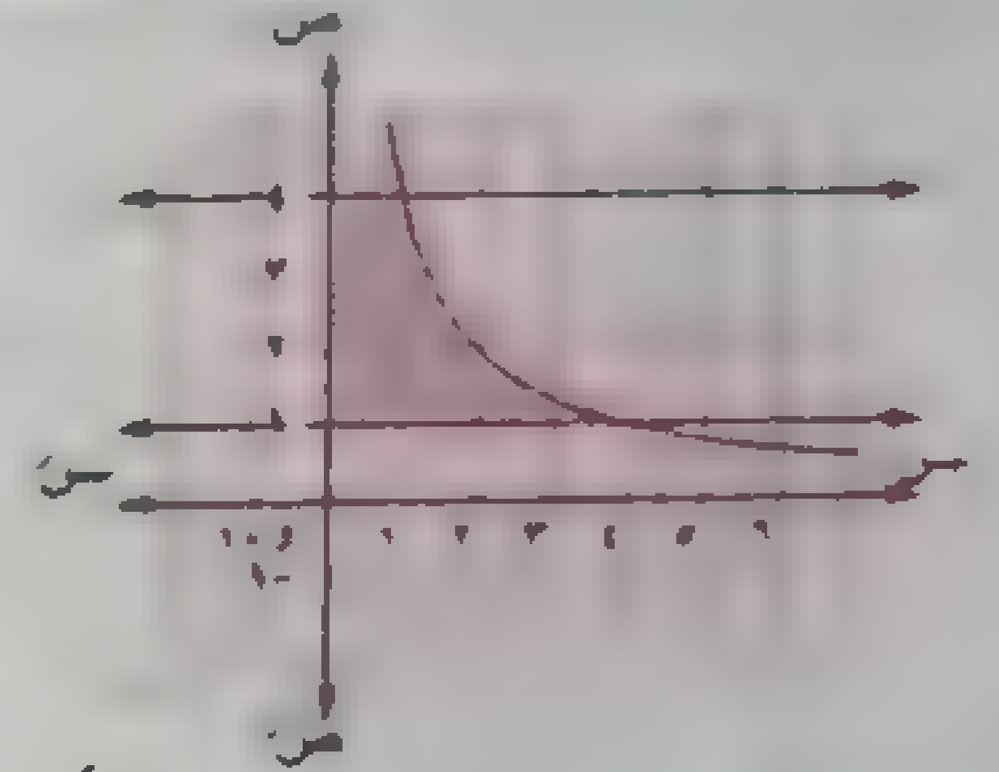


ص = $\sqrt{\text{س}}$ ∴ س = ص^2

∴ الحجم = $\pi \int_{1}^{2} \text{س}^2 \, \text{ءص} = \pi \int_{1}^{2} \text{ص}^4 \, \text{ءص}$

$= \pi \left[\frac{1}{5} \text{ص}^5\right]_{1}^{2} = \frac{31}{5} \pi$ وحدة حجوم.

⑦



س ص = ٤ ∴ س = $\frac{٤}{ص}$

∴ الحجم = π $\int_{١}^{٤}$ س^{٢} ء ص = π $\int_{١}^{٤}$ $\frac{١٦}{ص^{٢}}$ ء ص

= π $\int_{١}^{٤}$ ١٦ ص$^{-٢}$ ء ص

= π $\left[-١٦ ص^{-١}\right]_{١}^{٤}$

= ١٢ π وحدة حجوم.

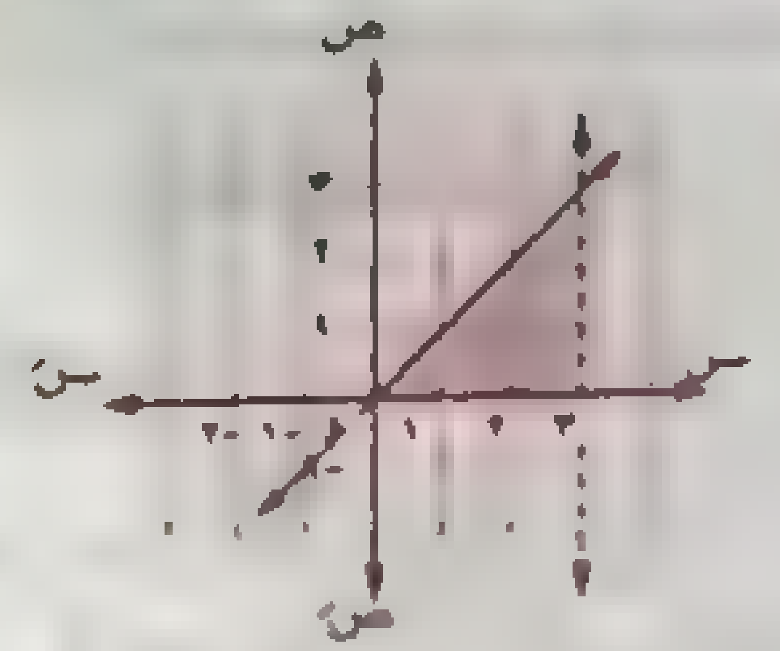
⑧ $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ١ ∴ $\sqrt{س}$ = ١ − $\sqrt{ص}$

∴ س = (١ − $\sqrt{ص}$)^{٢} يقطع الصادات فى ١

∴ الحجم = π $\int$ س^{٢} ء ص

= π $\int$ (١ − $\sqrt{ص}$)^{٤} ء ص

[illegible]



بدوران المنطقة المستوية المحصورة بين س = ٠ ، س = ٣ ، د (س) = س حول محور السينات ينتج مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ وحدات طول وارتفاعه ٣ وحدات طول.

∴ حجمه بالتكامل = π $\int_{٠}^{٣}$ ص^{٢} ء س

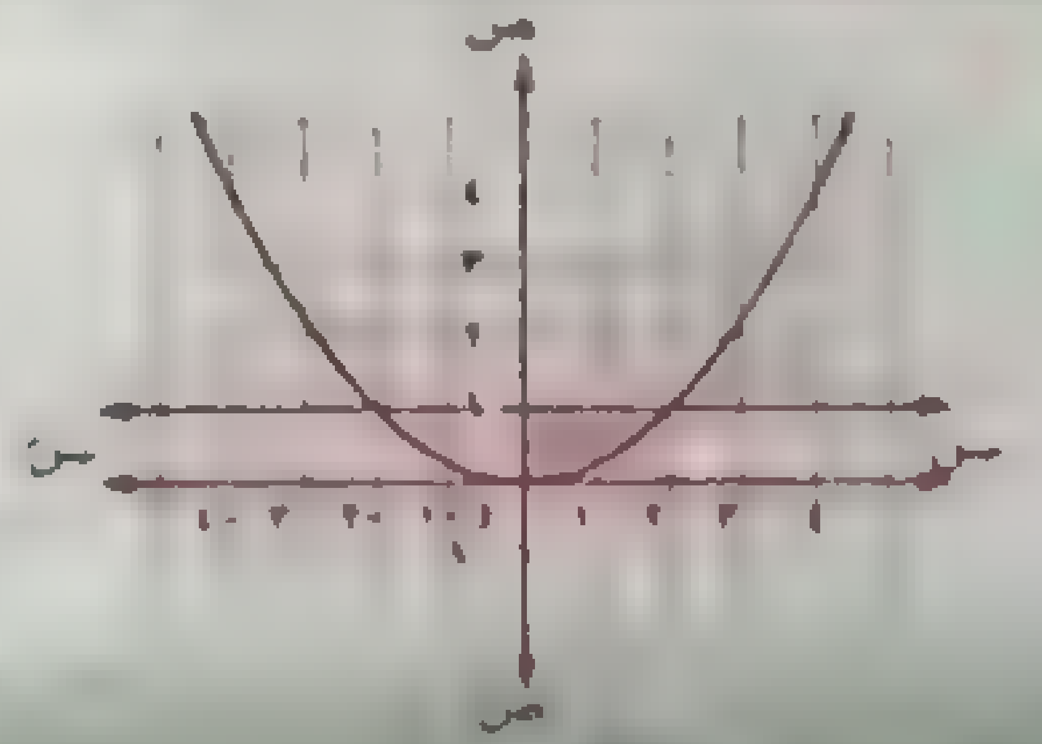
= π $\int_{٠}^{٣}$ س^{٢} ء س

= π × $\left[\frac{١}{٣} س^{٣}\right]_{٠}^{٣}$

= ٩ π وحدة حجوم.

، الحجم بواسطة قانون حجم المخروط

= $\frac{١}{٣}$ π (٣)^{٢} × ٣ = ٩ π وحدة حجوم.



① حول محور الصادات

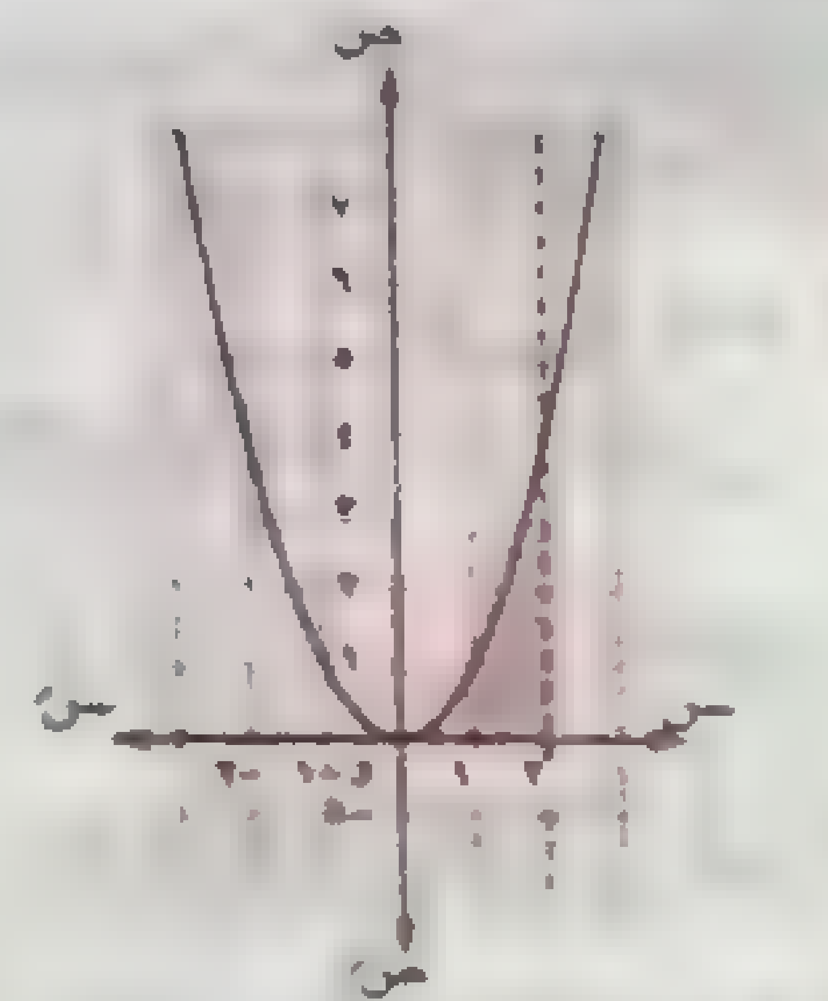
الحجم = π $\int$ س^{٢} ء ص = π $\int$ ٤ ص ء ص

= π $\left[٢ ص^{٢}\right]$ = ٢ π وحدة حجوم

② حول محور السينات عند ص = ١ فإن س = ٢

∴ الحجم = π $\int_{}^{٢}$ (١^{٢} − ص^{٢}) ء س

[illegible]



① حول محور السينات

∴ ص = س^{٢} يقطع محور السينات فى صفر

∴ الحجم = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ء س = π $\int_{٠}^{٢}$ س^{٤} ء س

= π $\left[\frac{١}{٥} س^{٥}\right]_{٠}^{٢}$ = $\frac{٣٢}{٥}$ π وحدة حجوم

② حول محور الصادات

عند س = ٢ فإن ص = ٤

∴ الحجم = π $\int_{٠}^{٤}$ (٤ − س^{٢}) ء ص

= π $\int_{٠}^{٤}$ (٤ − ص) ء ص

= π $\left[٤ ص - \frac{١}{٢} ص^{٢}\right]_{٠}^{٤}$

= ٨ π وحدة حجوم

[illegible]

② حول محور الصادات

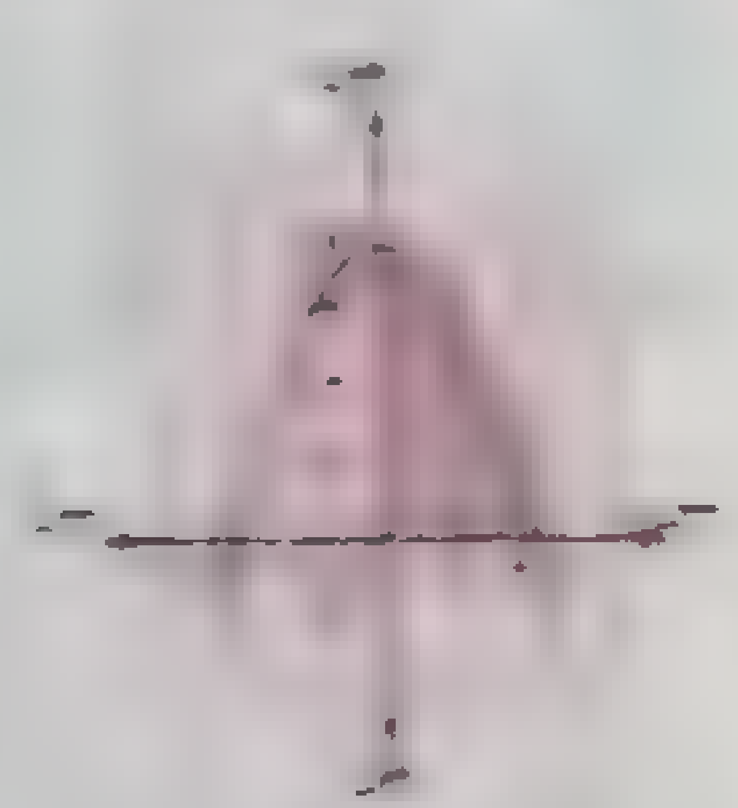
∴ الحجم = π $\int$ س^{٢} ء ص

= π $\int$ (٤ − ص)^{٢} ء ص

= π $\int$ (١٦ − ٨ ص + ص^{٢}) ء ص

= π $\left[١٦ ص - \frac{٨}{٢} ص^{٢} + \frac{١}{٣} ص^{٣}\right]$

= $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة حجوم



ص = ٤ − س^{٢} ومنها س^{٢} = ٤ − ص

① حول محور السينات

∴ الحجم = π $\int$ ص^{٢} ء س

= π $\int$ (٤ − س^{٢})^{٢} ء س

= π $\int$ (١٦ − ٨ س^{٢} + س^{٤}) ء س

[illegible]

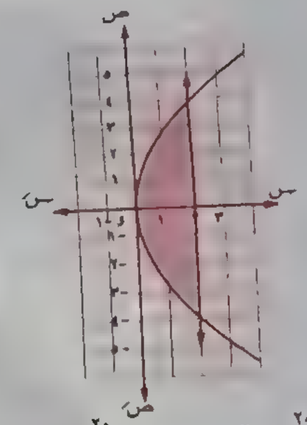
② حول محور الصادات

∴ الحجم = π $\int$ س^{٢} ء ص

= π $\int$ (٤ − ص) ء ص

[illegible]

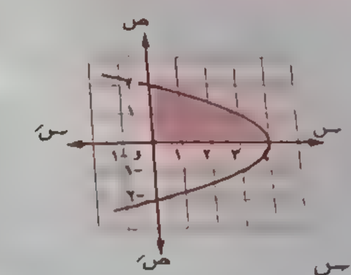
٨



الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ء س = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ٨ س ء س

= π [٤ س^{٢}]$_{٠}^{٢}$ = ١٦ π وحدة حجوم.

٩



ص^{٢} = ٤ − س

① حول محور السينات :

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٤}$ ص^{٢} ء س

= $\pi \int_{٠}^{٤}$ (٤ − س) ء س

= π [٤ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{٠}^{٤}$

= ٨ π وحدة حجوم.

② حول محور الصادات

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ س^{٢} ء ص

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٤ − ص^{٢})^{٢} ء ص

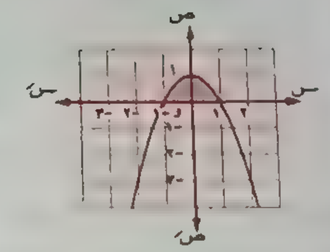
= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (١٦ − ٨ ص^{٢} + ص^{٤}) ء ص

= π [١٦ ص − $\frac{٨}{٣}$ ص^{٣} + $\frac{١}{٥}$ ص^{٥}]$_{٠}^{٢}$

$\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة حجوم.

١٠

①



د (س) = ١ − س^{٢} يقطع محور السينات فى −١ ، ١

∴ الحجم = $\pi \int_{-١}^{١}$ ص^{٢} ء س

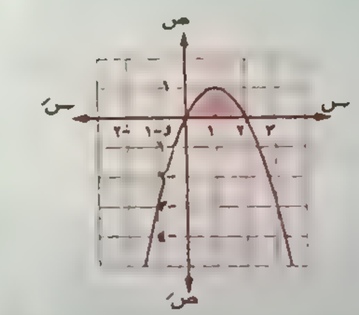
= $\pi \int_{-١}^{١}$ (١ − س^{٢})^{٢} ء س

= $\pi \int_{-١}^{١}$ (١ − ٢ س^{٢} + س^{٤}) ء س

= π [س − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + $\frac{١}{٥}$ س^{٥}]$_{-١}^{١}$

= $\frac{١٦}{١٥}$ π وحدة حجوم.

②



د (س) = ٢ س − س^{٢} يقطع محور السينات فى صفر ، ٢

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ص^{٢} ء س

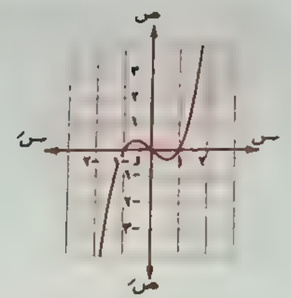
= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٢ س − س^{٢})^{٢} ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (٤ س^{٢} − ٤ س^{٣} + س^{٤}) ء س

= π [$\frac{٤}{٣}$ س^{٣} − س^{٤} + $\frac{١}{٥}$ س^{٥}]$_{٠}^{٢}$

= $\frac{١٦}{١٥}$ π وحدة حجوم.

③



د (س) = س^{٣} − س يقطع محور السينات فى صفر ، ١ ، −١

∴ الحجم = $\pi \int_{-١}^{١}$ ص^{٢} ء س

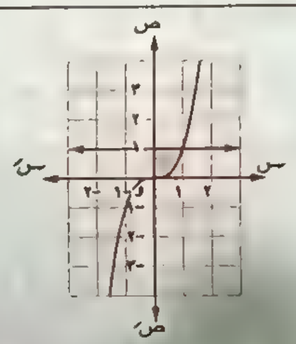
= $\pi \int_{-١}^{١}$ (س^{٣} − س)^{٢} ء س

= $\pi \int_{-١}^{١}$ (س^{٦} − ٢ س^{٤} + س^{٢}) ء س

= π [$\frac{١}{٧}$ س^{٧} − $\frac{٢}{٥}$ س^{٥} + $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{-١}^{١}$

= $\frac{١٦}{١٠٥}$ π وحدة حجوم.

١١



ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = س^{٣}

، ∵ ص$_{١}$ ≥ ص$_{٢}$ فى الفترة [٠ ، ١]

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{١}$ (ص$_{١}^{٢}$ − ص$_{٢}^{٢}$) ء س

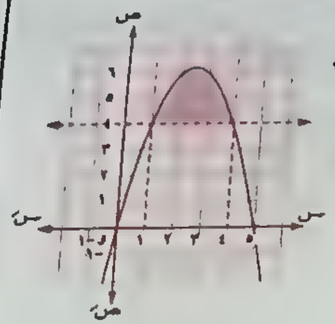
= $\pi \int_{٠}^{١}$ (١ − س^{٦}) ء س

= π [س − $\frac{١}{٧}$ س^{٧}]$_{٠}^{١}$ = $\frac{٦}{٧}$ π وحدة حجم.

∴ π نق^{٢} × ٤٢ = $\frac{٦}{٧}$ π

∴ نق = $\frac{١}{٧}$ وحدة طول.

١٢



ص$_{١}$ = ٥ س − س^{٢}

، ص$_{٢}$ = ٤

يتقاطعا فى س = ١

، س = ٤

، ∵ ص$_{١}$ ≥ ص$_{٢}$

فى الفترة [١ ، ٤]

∴ الحجم = $\pi \int_{١}^{٤}$ (ص$_{١}^{٢}$ − ص$_{٢}^{٢}$) ء س

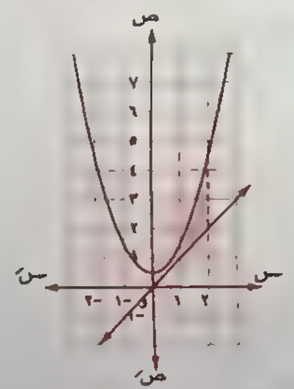
= $\pi \int_{١}^{٤}$ ((٥ س − س^{٢})^{٢} − ٤^{٢}) ء س

= $\pi \int_{١}^{٤}$ (٢٥ س^{٢} − ١٠ س^{٣} + س^{٤} − ١٦) ء س

= π [$\frac{٢٥}{٣}$ س^{٣} − $\frac{٥}{٢}$ س^{٤} + $\frac{١}{٥}$ س^{٥} − ١٦ س]$_{١}^{٤}$

= ٤٤,١ π وحدة حجوم.

١٣



ص$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ + س^{٢} ، ص$_{٢}$ = س

، ∵ ص$_{١}$ ≥ ص$_{٢}$ فى الفترة [٠ ، ٢]

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢}$ (ص$_{١}^{٢}$ − ص$_{٢}^{٢}$) ء س

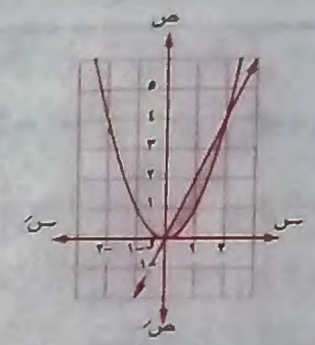
= $\pi \int_{٠}^{٢}$ (($\frac{١}{٢}$ + س^{٢})^{٢} − س^{٢}) ء س

= $\pi \int_{٠}^{٢}$ ($\frac{١}{٤}$ + س^{٢} + س^{٤} − س^{٢}) ء س

= π [$\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١}{٥}$ س^{٥}]$_{٠}^{٢}$

= ٦,٩ π وحدة حجوم.

١٤



$ص_١ = س^٢$ ، $ص_٢ = ٢ س$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ٢$

، فى هذه الفترة $ص_٢ \geq ص_١$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} (ص_٢^٢ - ص_١^٢)\, ءس$

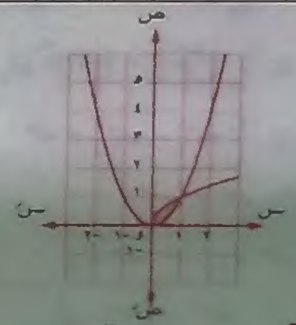
$= \pi \int_{٠}^{٢} ((٢ س)^٢ - (س^٢)^٢)\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٤ س^٢ - س^٤)\, ءس$

$= \pi \left[\frac{٤}{٣} س^٣ - \frac{١}{٥} س^٥ \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٦٤}{١٥} \pi$ وحدة حجوم.

١٥



$ص_١ = \sqrt{س}$ ، $ص_٢ = س^٢$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ١$

، $\because$ $ص_١ \geq ص_٢$ فى هذه الفترة

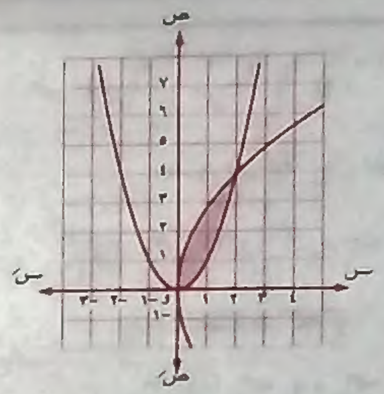
$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{١} (ص_١^٢ - ص_٢^٢)\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{١} (س - س^٤)\, ءس$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} س^٢ - \frac{١}{٥} س^٥ \right]_{٠}^{١}$

$= \frac{٣}{١٠} \pi$ وحدة حجوم.

١٦



$ص_١^٢ = ٨ س$ ، $ص_٢ = س^٢$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ٢$

، $\because$ $ص_١ \geq ص_٢$ فى هذه الفترة

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} (ص_١^٢ - ص_٢^٢)\, ءس$

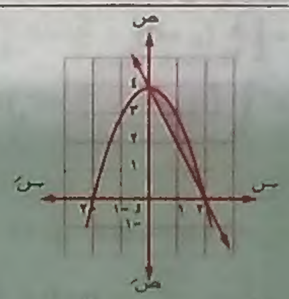
$= \pi \int_{٠}^{٢} (٨ س - (س^٢)^٢)\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{٢} ((٨ س - س^٤))\, ءس$

$= \pi \left[٤ س^٢ - \frac{١}{٥} س^٥ \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٤٨}{٥} \pi$ وحدة حجوم.

١٧



$ص = ٤ - س^٢$ $\therefore س_١^٢ = ٤ - ص$

، $٢ س + ص = ٤$ $\therefore س_٢ = ٢ - \frac{١}{٢} ص$

يتقاطعان عند $ص = ٠$ ، $ص = ٤$

وتكون $س_١ \leq س_٢$ فى الفترة $[٠ ، ٤]$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} (س_١^٢ - س_٢^٢)\, ءص$

$= \pi \int_{٠}^{٤} ((٤ - ص) - (٢ - \frac{١}{٢} ص)^٢)\, ءص$

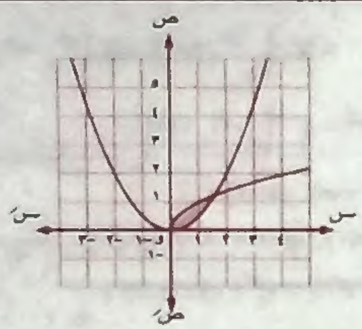
$= \pi \int_{٠}^{٤} (٤ - ص - ٤ + ٢ ص - \frac{١}{٤} ص^٢)\, ءص$

$= \pi \int_{٠}^{٤} (ص - \frac{١}{٤} ص^٢)\, ءص$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} ص^٢ - \frac{١}{١٢} ص^٣ \right]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٨}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

١٨



$س_١^٢ = ٢ ص$ ، $س_٢ = ص^٢$

يتقاطعا فى $ص = ٠$ ، $ص = \sqrt[٣]{٢}$

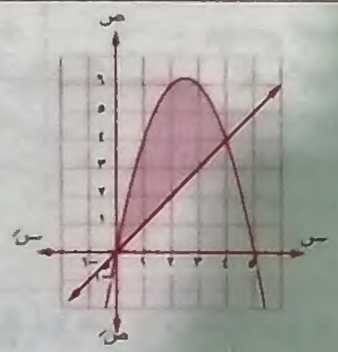
وفى هذه الفتره $س_١ \leq س_٢$

الحجم $= \pi \int_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}} (س_١^٢ - س_٢^٢)\, ءص$

$= \pi \int_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}} (٢ ص - ص^٤)\, ءص$

$= \pi \left[ص^٢ - \frac{١}{٥} ص^٥ \right]_{٠}^{\sqrt[٣]{٢}} = ٠,٩٥ \pi$ وحدة حجوم.

١٩



$ص_١ = ٥ س - س^٢$ ، $ص_٢ = س$

يتقاطعا عند $س = ٠$ ، $س = ٤$

وفى هذه الفترة $ص_١ \leq ص_٢$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} (ص_٢^٢ - ص_١^٢)\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{٤} ((٥ س - س^٢)^٢ - س^٢)\, ءس$

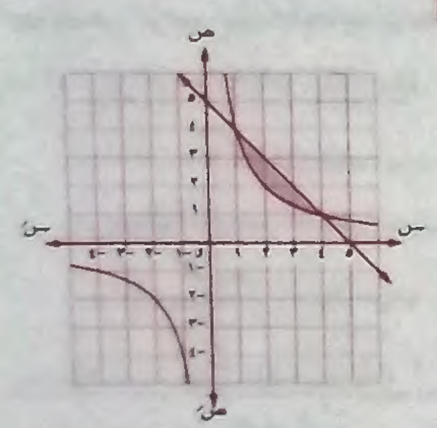
$= \pi \int_{٠}^{٤} (٢٥ س^٢ - ١٠ س^٣ + س^٤ - س^٢)\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{٤} (٢٤ س^٢ - ١٠ س^٣ + س^٤)\, ءس$

$= \pi \left[٨ س^٣ - \frac{٥}{٢} س^٤ + \frac{١}{٥} س^٥ \right]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٣٨٤}{٥} \pi = ٧٦,٨ \pi$ وحدة حجوم.

٢٠



$ص_١ = \frac{٤}{س}$ ، $ص_٢ = ٥ - س$

يتقاطعا عند $س = ١$ ، $س = ٤$

وتكون $ص_١ \geq ص_٢$ فى هذه الفترة

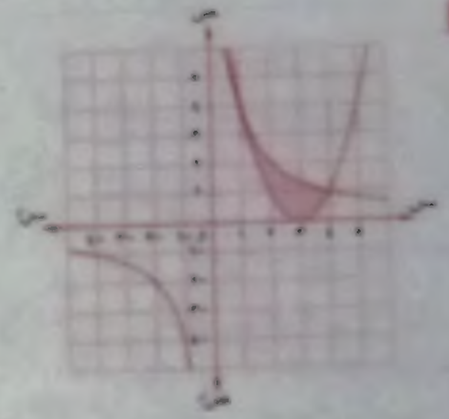
$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{١}^{٤} (ص_٢^٢ - ص_١^٢)\, ءس$

$= \pi \int_{١}^{٤} (٥ - س)^٢ - (\frac{٤}{س})^٢\, ءس$

$= \pi \int_{١}^{٤} (٢٥ - ١٠ س + س^٢ - \frac{١٦}{س^٢})\, ءس$

$= \pi \left[٢٥ س - ٥ س^٢ + \frac{١}{٣} س^٣ + ١٦ س^{-١} \right]_{١}^{٤} = ٩ \pi$ وحدة حجوم.

٢١



$ص_١ = \frac{١}{س}$ ، $ص_٢ = (س - ٢)^٢$

يتقاطعا عند $س = ١$ ، $س = ٤$

وفي هذه الفترة $ص_١ \geq ص_٢$

∴ الحجم $= \pi \int_{١}^{٤} ص_١^٢ - ص_٢^٢ \, ءس$

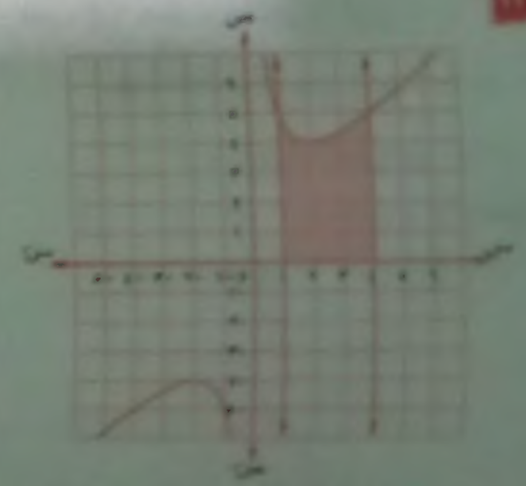
$= \pi \int_{١}^{٤} \left(\frac{١}{س}\right)^٢ - (س - ٢)^٢ \, ءس$

$= \pi \int_{١}^{٤} \frac{١}{س^٢} - (س - ٢)^٢ \, ءس$

$= \pi \left[-١ \, س^{-١} - \frac{١}{٣} (س - ٢)^٣\right]_{١}^{٤}$

$= ٤.٠ \pi$ وحدة حجوم.

٢٢



$س ص = ٤ \Leftarrow س^٢$ ∴ $ص = \frac{٤}{س}$

① المساحة $= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{س} - س\right) ءس$

$= \left[٤ \, لو_هـ |س| - \frac{١}{٢} س^٢\right]_{١}^{٢}$

$= ٤ \, لو_هـ ٤ - \frac{٣}{٢}$ وحدة مساحة.

② الحجم $= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{س} - س\right)^٢ ءس$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{١٦}{س^٢} - ٨ + س^٢\right) ءس$

$= \pi \left[-١٦ \, س^{-١} - ٨ س + \frac{١}{٣} س^٣\right]_{١}^{٢}$

$= ٥٧ \pi$ وحدة حجوم.

٢٣

① المساحة $= \int_{٠}^{٢} \left(\sqrt{٢ س} - \frac{١}{٢} س^٢\right) ءس$

$= \left[\frac{١}{٢} (٢ س)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٦} س^٣\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{٤}{٣}$ وحدة مساحة.

② الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} \left(\sqrt{٢ س}\right)^٢ - \left(\frac{١}{٢} س^٢\right)^٢ ءس$

$= \pi \int_{٠}^{٢} \left(٢ س - \frac{١}{٤} س^٤\right) ءس$

$= \pi \left[س^٢ - \frac{١}{٢٠} س^٥\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١٢}{٥} \pi$ وحدة حجوم.

٢٤

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ (بالضرب × $أ^٢ ب^٢$)

∴ $ب^٢ س^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٢ ب^٢$

∴ $ص^٢ = \frac{أ^٢ ب^٢ - ب^٢ س^٢}{أ^٢}$

، عندما $ص = ٠$ فإن $س = \pm أ$

∴ الحجم $= \pi \int_{-أ}^{أ} ص^٢ ءس$

$= \pi \int_{-أ}^{أ} \left(ب^٢ - \frac{ب^٢ س^٢}{أ^٢}\right) ءس$

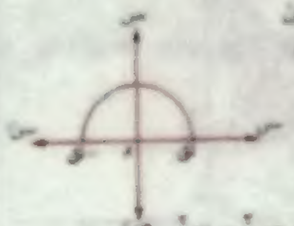
$= ٢ \pi \int_{٠}^{أ} \left(ب^٢ - \frac{ب^٢ س^٢}{أ^٢}\right) ءس$

$= ٢ \pi \left[ب^٢ س - \frac{١}{٣} \frac{ب^٢ س^٣}{أ^٢}\right]_{٠}^{أ}$

$= ٢ \pi \left(أ ب^٢ - \frac{١}{٣} أ ب^٢\right) = \frac{٤}{٣} أ ب^٢ \pi$

٢٥

① الكرة تنشأ عن دوران نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق حول محور السينات



∴ معادلتها $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

∴ $ص^٢ = نق^٢ - س^٢$

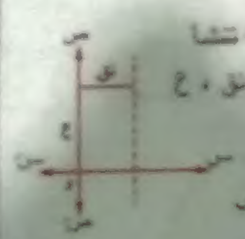
∴ حجم الكرة $= \pi \int_{-نق}^{نق} ص^٢ ءس$

$= ٢ \pi \int_{٠}^{نق} \left(نق^٢ - س^٢\right) ءس$

$= ٢ \pi \left[نق^٢ س - \frac{١}{٣} س^٣\right]_{٠}^{نق}$

$= ٢ \pi \left[نق^٣ - \frac{١}{٣} نق^٣\right] = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

② الأسطوانة الدائرية القائمة تنشأ عن دوران مستطيل بعداه نق ، ع حول محور الصادات

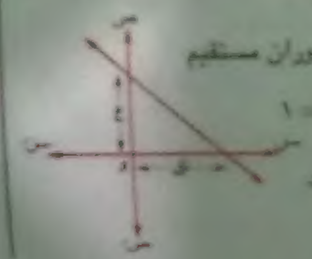


الحجم $= \pi \int_{٠}^{ع} س^٢ ءص$

$= \pi \int_{٠}^{ع} نق^٢ ءص = \pi \left[نق^٢ ص\right]_{٠}^{ع}$

$= \pi نق^٢ ع$

③ المخروط ينشأ عن دوران مستقيم معادلته $\frac{س}{نق} + \frac{ص}{ع} = ١$ حول محور الصادات



∴ الحجم $= \pi \int_{٠}^{ع} س^٢ ءص$

$= \pi \int_{٠}^{ع} \left(نق - \frac{نق ص}{ع}\right)^٢ ءص$

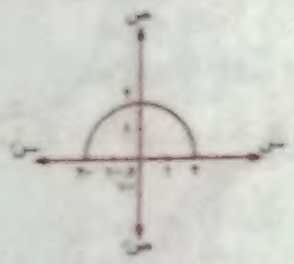
$= \pi \int_{٠}^{ع} \left(نق^٢ - ٢ \frac{نق^٢}{ع} ص + \frac{نق^٢ ص^٢}{ع^٢}\right) ءص$

$= \pi \left[نق^٢ ص - \frac{نق^٢ ص^٢}{ع} + \frac{١}{٣} \frac{نق^٢ ص^٣}{ع^٢}\right]_{٠}^{ع}$

$= \pi \left(نق^٢ ع - نق^٢ ع + \frac{١}{٣} نق^٢ ع\right)$

$= \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

٢٦



$ص = \sqrt{٤ - س^٢}$ منها $س^٢ + ص^٢ = ٤$

هي معادلة دائرة طول نصف قطرها ٢ وحدة طول.

∴ الحجم الناشئ من دوران $ص = \sqrt{٤ - س^٢}$ حول محور السينات دورة كاملة.

$= \pi \int_{-٢}^{٢} ص^٢ ءس = \pi \int_{-٢}^{٢} \left(٤ - س^٢\right) ءس$

$= \pi \left[٤ س - \frac{١}{٣} س^٣\right]_{-٢}^{٢}$

$= \frac{٣٢}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

٢٧

يتقاطع المنحنيان $د(س) = \sqrt{٢٥ - س^٢}$

، $ن(س) = ٣$ عند $س = \pm ٤$ ، $س = ٤$

، ∵ $د(س) > ن(س)$ في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{-٤}^{٤} [د(س)]^٢ - [ر(س)]^٢ \, ءس$

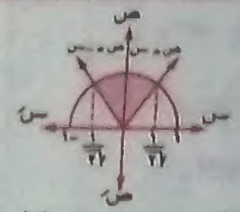
= $٢\pi \int_{٠}^{٤} (٢٥ - س^٢ - ٣^٢) \, ءس$

= $٢\pi \int_{٠}^{٤} (١٦ - س^٢) \, ءس$

= $٢\pi \left[١٦ س - \frac{١}{٣} س^٣ \right]_{٠}^{٤}$

= $\frac{٢٥٦}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

٢٨



∵ الشكل متماثل حول محور الصادات

∴ الحجم = $٢\pi \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} (\sqrt{١ - س^٢})^٢ - (س)^٢ \, ءس$

= $٢\pi \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} (١ - س^٢ - س^٢) \, ءس$

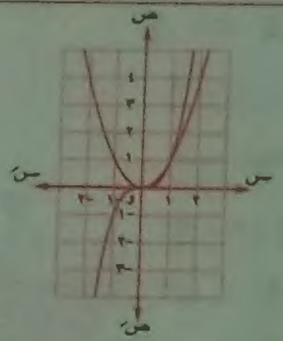
= $٢\pi \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}} (١ - ٢س^٢) \, ءس$

= $٢\pi \left[س - \frac{٢}{٣} س^٣ \right]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$

= $٢\pi \left[\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٣\sqrt{٢}} \right]$

= $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

٢٩



∵ $س_١ = \sqrt{ص}$ ، $س_٢ = \sqrt[٣]{ص}$

المنحنيان يتقاطعان فى ص = ٠ ، ص = ١

، ∵ $س_٢ > س_١$ فى هذه الفترة.

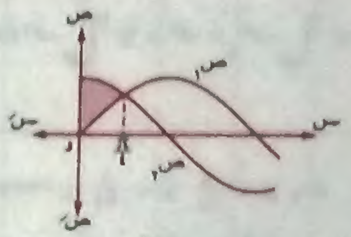
∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{١} (س_٢^٢ - س_١^٢) \, ءص$

= $\pi \int_{٠}^{١} (ص^{\frac{٢}{٣}} - ص) \, ءص$

= $\pi \left[\frac{٣}{٥} ص^{\frac{٥}{٣}} - \frac{١}{٢} ص^٢ \right]_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{١٠} \pi$ وحدة حجوم.

٣٠



$ص_١$ = جاس ، $ص_٢$ = جتاس

، ∵ جتاس > جاس فى الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٤}]$

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (جتاس)^٢ - (جاس)^٢ \, ءس$

= $\pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا ٢س \, ءس$

= $\pi \left[\frac{١}{٢} جا ٢س \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

= $\frac{١}{٢} \pi$ وحدة حجوم.

٣١

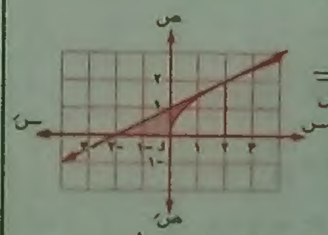
① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (د)	⑤ (أ)
⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (أ)	⑩ (جـ)
⑪ (د)	⑫ (أ)	⑬ (أ)		

٣٢

$ص_١ = \sqrt{٢س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س}}$

= $\frac{١}{\sqrt{٢س}}$



∴ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ٢) = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس عند هذه النقطة : $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$

∴ س − ٢ص + ٢ = ٠ ∴ $ص_٢ = \frac{١}{٢} س + ١$

، ∵ المماس يقطع محور السينات عند س = −٢

∴ الحجم = $\pi \int_{-٢}^{٢} ص_٢^٢ \, ءس - \pi \int_{-٢}^{٢} ص_١^٢ \, ءس$

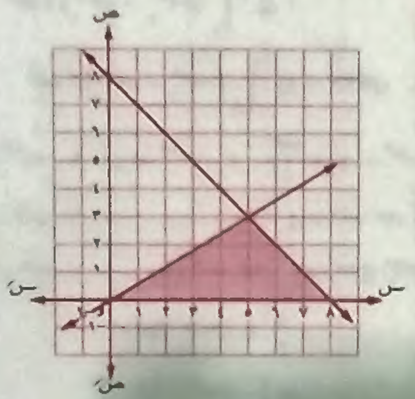
= $\pi \int_{-٢}^{٢} (\frac{١}{٢} س + ١)^٢ \, ءس$

− $\pi \int_{-٢}^{٢} ٢س \, ءس$

= $\pi \left[\frac{(\frac{١}{٢} س + ١)^٣}{٣ \times \frac{١}{٢}} \right]_{-٢}^{٢} - \pi \left[س^٢ \right]_{-٢}^{٢}$

= $\frac{١٦}{٣} \pi - ٤\pi = \frac{٤}{٣} \pi$ وحدة مكعبة.

٣٣



س + ص = ٨ ∴ $ص_١$ = ٨ − س

، ٣س − ٥ص = ٠ ∴ $ص_٢ = \frac{٣}{٥}$ س

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٥} (ص_٢)^٢ \, ءس + \pi \int_{٥}^{٨} (ص_١)^٢ \, ءس$

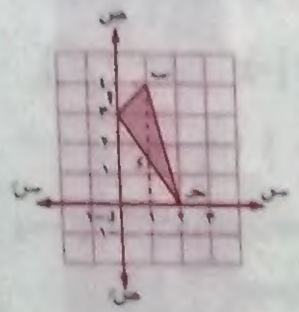
= $\pi \int_{٠}^{٥} (\frac{٣}{٥} س)^٢ \, ءس$

+ $\pi \int_{٥}^{٨} (٨ - س)^٢ \, ءس = \pi \left[\frac{٣}{٢٥} س^٣ \right]_{٠}^{٥}$

+ $\pi \left[\frac{-١}{٣} (٨ - س)^٣ \right]_{٥}^{٨} = (\pi ١٥) + (\pi ٩)$

= ٢٤ π وحدة حجوم.

٣٤



معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

$\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{٤ - ٣}{١ - ٠} = \frac{١}{١}$

∴ ص − ٣ = س

∴ ص = س + ٣

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$

$\frac{ص - ٠}{س - ٢} = \frac{٤ - ٠}{١ - ٢} = -٤$

∴ ص = −٤س + ٨

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$

$\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{٠ - ٣}{٢ - ٠} = \frac{-٣}{٢}$ ∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣

∴ مساحة سطح المثلث أ ب حـ

= مساحة Δ أ ب ء + مساحة المثلث ء ب حـ

= $\int_{٠}^{١} (س + ٣) - (\frac{-٣}{٢} س + ٣) \, ءس$

+ $\int_{١}^{٢} (-٤س + ٨) - (\frac{-٣}{٢} س + ٣) \, ءس$

= $\int_{٠}^{١} \frac{٥}{٢} س \, ءس + \int_{١}^{٢} (\frac{٥}{٢} س + ٥) \, ءس$

= $\left[\frac{٥}{٤} س^٢ \right]_{٠}^{١} + \left[\frac{٥}{٤} س^٢ + ٥س \right]_{١}^{٢}$

= $\frac{٥}{٤} + \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$ وحدة مساحة.

إذا كان ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣

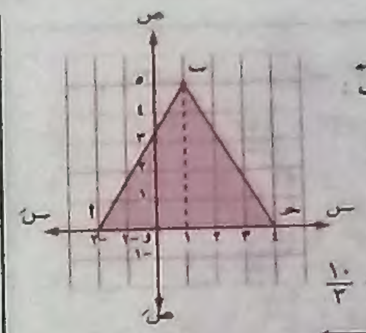
∴ س = $\frac{-٢}{٣}$ ص + ٢

∴ الحجم الناشئ من دوران Δ أ ب حـ حول محور الصادات

= $\pi \int_{٠}^{٣} س^٢ \, ءص = \pi \int_{٠}^{٣} (\frac{-٢}{٣} ص + ٢)^٢ \, ءص$

= $\pi \left[\frac{-١}{٢} (\frac{-٢}{٣} ص + ٢)^٣ \right]_{٠}^{٣} = ٤\pi$ وحدة حجوم.

٣٥



معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٥ - ٠}{١ - -٢}$

$= \frac{٥}{٣}$

$\therefore$ $ص_١ = \frac{٥}{٣}$ س $+ \frac{١٠}{٣}$

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$:

$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٥ - ٠}{١ - ٤} = \frac{-٥}{٣}$

$\therefore$ $ص_٢ = \frac{-٥}{٣}$ س $+ \frac{٢٠}{٣}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-٢}^{١} (ص_١)^٢ ء س + \pi \int_{١}^{٤} (ص_٢)^٢ ء س$

$= \pi \int_{-٢}^{١} \left(\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}\right)^٢ ء س$

$+ \pi \int_{١}^{٤} \left(\frac{-٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}\right)^٢ ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\left(\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}\right)^٣\right]_{-٢}^{١}$

$+ \pi \left[-\frac{١}{٥}\left(\frac{-٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}\right)^٣\right]_{١}^{٤}$

$= ٢٥ \pi + ٢٥ \pi = ٥٠ \pi$ وحدة حجوم.

٣٦

① معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$\frac{ص - ٢}{س - ٠} = \frac{٤ - ٢}{٠ - ٦} = \frac{١}{٣}$

$\therefore$ ص $= \frac{١}{٣}$ س $+ ٢$

② المنحنى د يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ عندما

$\frac{٩}{س} = \frac{١}{٣}$ س $+ ٢$ $\quad\therefore$ $٢٧ = س^٢ + ٦$ س

$\therefore$ $س^٢ + ٦$ س $- ٢٧ = ٠$

$\therefore$ س $= -٩$ (مرفوض) أ، س $= ٣$

$\therefore$ ص $= ٣$ $\quad\therefore$ حـ $= (٣ ، ٣)$

③ ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٩}{س^٢}$

$\therefore$ ميل المماس عند حـ $= -١$

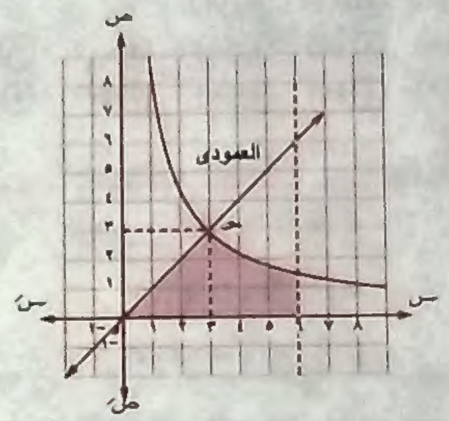
$\therefore$ ميل العمودى $= \frac{-١}{-١} = ١$

$\therefore$ معادلة العمودى : $\frac{ص - ٣}{س - ٣} = ١$

$\therefore$ س $-$ ص $= ٠$

$\therefore$ يمر بنقطة الأصل

④



الحجم $= \pi \int_{٠}^{٣} س^٢ ء س + \pi \int_{٣}^{٦} \left(\frac{٩}{س}\right)^٢ ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٣} س^٣\right]_{٠}^{٣} + \pi \left[-٨١ س^{-١}\right]_{٣}^{٦}$

$= ٩ \pi + \frac{٢٧}{٢} \pi = \frac{٤٥}{٢} \pi$ وحدة حجوم.

٣٧

الحجم $= \pi \int_{١}^{ك} ص^٢ ء س = \pi \int_{١}^{ك} س ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} س^٢\right]_{١}^{ك} = \frac{\pi}{٢} (ك^٢ - ١)$

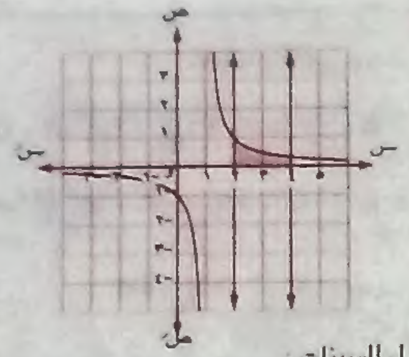
$\therefore$ $\frac{\pi}{٢} (ك^٢ - ١) = ١٢ \pi$

$\therefore$ $ك^٢ - ١ = ٢٤$ $\quad\therefore$ $ك^٢ = ٢٥$

$\therefore$ $ك = \pm ٥$ $\quad\because$ $ك > ١$

$\therefore$ $ك = ٥$

٣٨



① حول السينات :

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٢}^{٤} \left(\frac{١}{س - ١}\right)^٢ ء س$

$= \pi \int_{٢}^{٤} (س - ١)^{-٢} ء س$

$= \pi \left[-(س - ١)^{-١}\right]_{٢}^{٤}$

$= \frac{٢}{٣} \pi$ وحدة مكعبة.

② حول الصادات : عند س $= ٢$ $\quad\therefore$ ص $= ١$

، عند س $= ٤$ $\quad\therefore$ ص $= \frac{١}{٣}$

$س_١ = ١ + \frac{١}{ص}$ ، $س_٢ = ٢$ ، $س_٣ = ٤$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (س_٣^٢ - س_٢^٢) ء ص$

$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (س_١^٢ - س_٢^٢) ء ص$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (١٦ - ٤) ء ص$

$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left(\left(١ + \frac{١}{ص}\right)^٢ - ٤\right) ء ص$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} ١٢ ء ص$

$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left(\frac{٢}{ص} + \frac{١}{ص^٢} - ٣\right) ء ص$

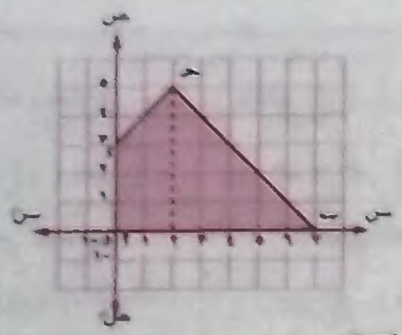
$= \pi \left[١٢ ص\right]_{٠}^{\frac{١}{٣}}$

$+ \pi \left[٢ لو_هـ |ص| - \frac{١}{ص} - ٣ ص\right]_{\frac{١}{٣}}^{١}$

$= ٤ \pi + ٢ \pi لو_هـ ٣$

$= ٢ \pi (٢ + لو_هـ ٣)$ وحدة حجوم.

٣٩



معادلة $\overleftrightarrow{حـ ء}$:

$\frac{ص - ٣}{س - ٠} = \frac{٥ - ٣}{٢ - ٠}$

$\therefore$ $\frac{ص - ٣}{س} = ١$ $\quad\therefore$ ص $=$ س $+ ٣$

$\therefore$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$: $\frac{ص - ٠}{س - ٧} = \frac{٥ - ٠}{٢ - ٧} = -١$

$\therefore$ ص $= -$ س $+ ٧$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٣}^{٧} (س + ٣)^٢ ء س$

$+ \pi \int_{٣}^{٧} (-س + ٧)^٢ ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٣} (س + ٣)^٣\right]_{٣}^{٧}$

$+ \pi \left[\frac{-١}{٣} (-س + ٧)^٣\right]_{٣}^{٧}$

$= \frac{٩٨}{٣} \pi + \frac{١٢٥}{٣} \pi = \frac{٢٢٣}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

* معادلة $\overleftrightarrow{بء}$ هى $\frac{س}{٧} + \frac{ص}{٣} = ١$

$\therefore$ ص $= \frac{-٣}{٧}$ س $+ ٣$

$\therefore$ الحجم الناشئ من دوران Δ بحـ ء حول محور السينات

$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi -$ الحجم الناشئ من دوران Δ بء أ

$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi - \pi \int_{٠}^{٧} \left(\frac{-٣}{٧} س + ٣\right)^٢ ء س$

$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi - \pi \left[\frac{-٧}{٩} \left(\frac{-٣}{٧} س + ٣\right)^٣\right]_{٠}^{٧}$

$= \frac{٢٢٣}{٣} \pi - ٢١ \pi = \frac{١٦٠}{٣} \pi$ وحدة حجوم.